Mathematisches Lehrbuch

zum Gebrauche
öffentlicher Vorlesungen
auf der
königl. baierischen Universität in Landshut,

verfaßt vom
Maurus Magold,
königl. geistl. Rathe und öffentl. ordentl. Professor
der Mathematik allda.

Des III. Theiles II. Abtheilung,

welche die höhere Geometrie, nebst Herrn Oberst-Bergrathes von Voith Vorschlägen zur Vervollkommnung der Markscheidekunst, und dessen Tabellen der Seigerteufen und Sohlen enthält.

Mit 5 Kupfern, Nr. VII. und XI. nebst 4 gedruckten Tabellen Nro. V. — VIII. zur höhern Geometrie, und 7 Kupfertabellen zu H. v. Voiths Abhandlung.

Zweyte vermehrte Ausgabe.

Landshut
in der Weberschen Buchhandlung.
1813.

Die Kupfer sowohl, als die gedruckten Tabellen müssen jedesmal am Ende so beygebunden werden, daß sie ganz herausgeschlagen werden können.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Lehrbuch
der
höhern Geometrie
zum Gebrauche
öffentlicher Vorlesungen
auf der
königl. baierischen Universität in Landshut,

verfaßt vom

Maurus Magold,
königl. geistl. Rathe und öffentl. ordentl. Professor
der Mathematik allda.

Nebst
Herrn v. Voiths Oberst-Bergrathes Vorschlägen
zur Vervollkommnung der Markscheidekunst und dessen Tabellen der Seigerteufen und Sohlen.

Mit 5 Kupfern Nro. VII. und XI., und 4 gedruckten
Tabellen Nro. V. — VIII. zur höheren Geometrie, und
7 Kupfertafeln zur H. v. Voiths Abhandlung.

Zweyte vermehrte Ausgabe.

Landshut
in der Weberschen Buchhandlung.
1813.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede
zur zweyten Ausgabe.

Die zur Mechanik nothwendigen Lehrsätze von den Epicycloiden wollte ich anfänglich an den gehörigen Stellen im zweyten Bande der Mechanik fester Körper einschalten, oder als eine besondere Abhandlung herausgeben; allein ersteres mißfiel mir zum Theil als eine Vermischung der reinen und angewandten Mathematik an sich schon, und zum Theil erlaubte es auch der nothwendige Raum nicht mehr; letzteres fand ich nicht räthlich, weil eine einzelne Abhandlung leicht vom Lehrbuche, wozu sie doch wesentlich gehört, ge-

trennt

trennt werden könnte: ich entschloß mich also diese Abhandlung der höhern Geometrie als den IVten Abschnitt des IIIten Hauptstückes zur Ergänzung beyzufügen, und die durch diese Vermehrung nothwendige Anzeige unter dem Titel: einer neuen Ausgabe der höhern Geometrie, dem Publico mitzutheilen.

Um den Besitzern der erstern Ausgabe keine unnützen Kösten zu verursachen, wird denselben auf Verlangen diese Zugabe über die Epicycloide einzeln nebst den veränderten Titeln, und Inhaltsverzeichniß zugesendet.

Daß ich bey der Epicycloide H. Eytelweins Handbuch der Statik fester Körper III. Band vorzüglich benutzt habe, erinnere ich um so lieber, als ich dadurch Gelegenheit habe, dem vortrefflichen Verfasser meine Hochachtung öffentlich zubezeugen.

Landshut den 9. October 1812.

Magold.

Inhalt.

Die höhere Geometrie.

Seite.

I. Hauptstück. Von krummen Linien überhaupt. 417

I. Abschnitt. Von der Beschaffenheit krummer Linien, und ihrer Abscissen und Ordinaten. 417

II. Abschnitt. Von trigonometrischen Differentialen, und von der Integration durch Kreisbögen. 427

III. Abschnitt. Von den Verhälnissen krummer Linien überhaupt. 460

II. Hauptstück. Von Kegelschnitten. . . . 484

I. Abschnitt. Von Kegelschnitten überhaupt. 484

II. Abschnitt. Von der Parabel. . . . 488

III. Abschnitt. Von der Ellipse. 513

IV. Abschnitt. Von der Hyperbel. . . . 566

V. Abschnitt. Vom Kreise. 607

Seite.

III. Hauptstück. Von höhern algebraischen, und transcendenten Linien. 627

I. Abschnitt. Von der Cissoid und Conchoid. 627

II. Abschnitt. Von der Quadratrix und Schneckenlinie. 639

III. Abschnitt. Von der Cycloide oder Radlinie. 645

IV. Abschnitt. Von der Epicycloide. . . . 661

Vorschläge zur Vervollkommnung der Markscheider Instrumente vom Ignaz Voith.

Markscheidertabellen der Seigerteufen und Sohlen, so wie der Breiten und Längen nach dem Decimalsystem in 0, 1 Theilen einer Prim.

Höhere Geometrie.

I. Hauptstück.

Von krummen Linien überhaupt.

I. Abschnitt.

Von der Beschaffenheit krummer Linien, und ihrer Abscissen und Ordinaten.

§. 231.

Erklärungen:

a) Eine krumme Linie (§. 4, Geometrie), welche ganz in einer Ebene liegt, heißt eine **krumme Linie von einfacher Krümmung**, und

b) **von doppelter Krümmung**, wenn ihre Puncte in verschiedenen Ebenen liegen.

§. 232.

Erklärung: (Fig. 79 und 80.)

Wenn man bey einer Linie AMN mit einfacher Krümmung in ihrer Ebene die gerade Linie AO, und durch beliebige Puncte P, p derselben, Parallellinien PM, pm zieht, welche die krumme Linie in M, m schneiden, so heißt

a) AO die Abscissenlinie, und,

b) wenn man A zu ihrem Anfangspunct nimmt, so sind AP, Ap die Abscissen, und MP, Np die Ordinaten für die Puncte M, m der krummen Linie.

c) Die Abscisse AP und ihre entsprechende Ordinate PM, heißen zusammen Coordinaten, und zwar

α) rechtwinklichte, wenn die Ordinate auf der Abscisse senkrecht steht, wie Fig. 79;

β) schiefwinklichte Coordinaten, wenn die Ordinate schief steht, wie Fig. 80.

I. **Zusatz:** Wenn in der Ebene der krummen Linie die Lage und der Anfangspunct A der Abscissenlinie AO bekannt ist, so ist durch die Größe der rechtwinklichten Coordinaten AP, PM die Lage des Punctes M der krummen Linie gegeben, hingegen

II.

II. Zusatz: bey schiefwinklichten Coordinaten (Fig. 80) muß überdieß noch der schiefe Winkel MPO gegeben seyn.

III. Zusatz: Für den Anfangspunct A der Abscissenlinie AO (Fig. 79) sind die Abscissen AP, Ap einander entgegensetzt, man nimmt daher erstere als eine positive, und letztere als eine negative Größe; und eben so ist's in Rücksicht der Ordinaten PM und pm oder Fig. 80 PM und PM′, pm pm′ (§. 205 II. Zus. Geom.)

IV. Zusatz: (Fig. 81) Stelle AMN eine Linie mit doppelter Krümmung vor, durch A lege man die Ebene BC, und ziehe in ihr die beliebige gerade Linie AO; von den Puncten M, N, Q der krummen Linie fälle man auf die Ebene BC die Perpendikel Mm, Nn, Q′q, von m, n, q ziehe man in letzterer Ebene auf AO die senkrechten Linien mP, nR, qQ; so ist durch AP, Pm, mM die Lage von M, und eben so durch AR, Rn, nN die Lage von N gegeben, mithin ist durch die Abscisse und die beyden rechtwinklichten Ordinaten jeder Punct der Linie mit doppelter Krümmung gegeben.

Anmerkung: Im gegenwärtigen Lehrbuche werden nur Linien von einfacher Krümmung abgehandelt, mithin nur solche in der Folge unter dem Namen krummer Linien verstanden.

§. 233.

Erklärung: (Fig. 82).

Eine Gleichung, welche das allgemeine Verhältniß der Coordinaten für jeden Punct einer krummen Linie angiebt, heißt eine Gleichung dieser krummen Linie; so ist z. B. $PM^2 = AP . PO$ eine Gleichung des Kreises (§. 101, Geom.)

I. Zusatz: Durch die Gleichung einer krummen Linie ist letztere vollkommen bestimmt (§. 232, I. — III. Zusatz).

II. Zusatz: Da die Gleichung einer krummen Linie für jeden Punct derselben das Verhältniß der Coordinaten angiebt, so sind letztere keine beständige, sondern veränderliche Größen, daher bezeichnet man gewöhnlich die Abscissen mit x, und die Ordinaten mit y (§. 184, Arithm.); setzet man im Kreise die Abscisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$, und den Diameter AO als eine beständige Größe $= a$; so ist für den Kreis $y^2 = ax - x^2$ (§. 101, Zus. Geom.)

III. Zusatz: Die Gleichung einer krummen Linie enthält also, ausser den veränderlichen, noch beständige Größen, mithin stellt sie eine Function der veränderlichen Größe x und y vor; denn in der

Glei-

Gleichung für den Kreis, oder $y^2 = ax - x^2$, ist y eine Function von x, und umgekehrt x eine Function von y (§. 185, Arithm.)

IV. Zusatz: Nimmt man zur Abscisse $AP = x$ noch eine beliebige $Ap = x'$ als Hilfslinie, so ist $Pp = Ap - AP = x' - x$ eine unendlich kleine Größe; denn man kann Ap beliebig, mithin den Punct p an P so nahe nehmen, als man will (§. 295, II. Zus. Arithm.); folglich ist Pp das Differential der Abscisse AP, oder $Pp = dx$ (§. 302, Arithm.)

V. Zusatz: Zieht man durch P, p die Ordinaten $PM = y$, und $pm = y'$, so sind sie Functionen, von x, x', mithin ist $mn = pm - PM = y' - y$ ebenfalls eine unendlich kleine Größe; denn wenn $x' - x = 0$ wird, so ist auch $y' - y = 0$; folglich ist mn das Differential der Ordinate PM, oder $mn = dy$ (§. 302, b. Arithm.)

VI. Zusatz: Setzt man den Bogen $AM = Z$, $Am = Z'$, so ist Mm unendlich klein, mithin das Differential des Bogens AM, oder Mm $= dZ$. Eben so, wenn man die von der Abscisse, Ordinate und dem Bogen begränzte Fläche AMP $= R$, und $Amp = R'$ setzt, so ist PMmp eine unendlich kleine Größe, folglich das Differential

oder

oder Element der Fläche AMP, d. i. PMmp = dR; denn Z, Z' sowohl, als R, R' sind Functionen von x, so daß Z' — Z = o, und eben so R' — R = o wird, wenn x' — x = o ist.

VII. Zusatz: Im Kreise, wenn man nebst den Abscissen AP, Ap, und rechtwinklichten Ordinaten PM, pm, die Sehne Mm, und die Tangens TM zieht, bis letztere mit der verlängerten Ordinate pm in m' zusammen stoßt, so ist pm' ebenfalls eine Hilfsgröße, welche mit pm die gemeinschaftliche Gränze PM hat, also pm' — pm eine unendlich kleine Größe (§. 295, III. Zus. Arithmet.), je näher nun pm, mithin auch pm' ihre Gränze rücken, das ist, je kleiner der Kreisbogen Mm wird, desto mehr nähern sich die Puncte m und m'; an der Gränze selbst, wo also der Bogen wirklich unendlich klein, also eine verschwindende Größe ist (§. 295, Arithm.), fällt m' mit m, folglich die Sehne Mm sowohl, als der kleine Theil Mm' der Tangens mit dem Kreisbogen Mm zusammen, und das Gränzverhältniß dieser 3 Größen ist ein Verhältniß der Gleichheit, das heißt: ein unendlich kleiner Bogen des Kreises ist seiner Sehne sowohl, als einem unendlich kleinen Theile seiner Tangens gleich (§. 125, 126 und 271, Nr. 3. Geom.) Betrachtet man sie aber in einiger Entfernung von dieser Gränze, wo also pm und pm' noch nicht mit PM zusammenfallen, so sind sie ungleich, aber ihr Unter-

schied

schied ist eine unendlich kleine Größe (§. 296, Arithm.). Wenn man daher in einer vollständigen oder unvollständigen Gleichung von diesen drey Stücken, nemlich von der Sehne Mm, dem Kreisbogen Mm, und dem Theilchen Mm′ der Tangens, eines an die Stelle des andern setzt, so wird durch diese Substitution die Gleichung nicht falsch, sondern sie wird entweder eine vollständige, oder bleibt wenigstens eine unvollständige Gleichung (§. 299, Arithm.)

VIII. Zusatz: Zieht man im Kreise durch M zur Abscissenlinie AO die Parallele Mn, so rücken die beyden geradlinigten Dreyecke Mnm, Mnm′ dem krummlinigten Mnm, dessen Seite der Kreisbogen Mm ist, um so näher, je näher pm′, pm ihrer gemeinschaftlichen Gränze PM kommen, stellt man sich letztere an ihrer Gränze vor, so fallen erstere als verschwindende Größen zusammen; außerhalb dieser Gränze aber ist der Unterschied dieser Dreyecke in Rücksicht der Seiten und ihrer Winkel sowohl, als ihres Flächeninhaltes eine unendlich kleine Größe; setzt man daher in einer Gleichung eines dieser Dreyecke an die Stelle des andern, so wird dadurch die Gleichung keine falsche, sondern bleibt wenigstens noch eine unvollständige Gleichung.

IX. Zusatz: Eben so verhält es sich im Kreise mit den beyden geradlinigten Trapezen PMmp, PMm′p

und

und dem krummlinigten Trapeze PMmp, von welchem eine Seite, nemlich Mm, ein unendlich kleiner Kreisbogen ist.

§. 234.

Aufgabe:

Aus der gegebenen Gleichung einer krummen Linie z. B. des Kreises, oder aus $y^2 = ax - x^2$, das Verhältniß der Differentiale der Abscissen und Ordinaten anzugeben.

I. Auflösung:

$y^2 = ax - x^2$, mithin

$2ydy = adx - 2xdx$ (§. 306, Arithm.), folglich

$$dy = \frac{adx - 2xdx}{2y} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}\, dx,$$

welche aber, so wie die vorhergehende eine vollständige Gleichung ist.

II. Auflösung: (Fig. 82)

1. Man ziehe die Ordinaten PM, pm, und den Radius CM $= \frac{1}{2}a$, wo a den Diameter bezeichnet.

2. Ferner ziehe man noch durch M mit Ap die Parallele Mn, so ist

3. AP $= x$, Mn $=$ Pp $= dx$, PM $= y$, und mn $= dy$, PC $=$ AC $-$ AP $= \frac{1}{2}a - x$.

4.

4. Nimmt man endlich den unendlich kleinen Bogen Mm als einen Theil der Tangens, also Mnm als ein geradlinigtes rechtwinklichtes Dreyeck, so ist

5. $\beta + \gamma = 90^\circ = \alpha + \beta$; mithin $\gamma = \alpha$; ferner n = P, also $\triangle Mnm \backsim \triangle MPC$, und

6. Mn : mn = PM : PC, oder
$dx : dy = y : \frac{1}{2}a - x$, folglich

7. $$dy = \frac{(\frac{1}{2}a - x)\,dx}{y} = \frac{a - 2x}{2y}\,dx.$$

8. Da man aber Nr. 4, Statt m′n die Linie mn, und Statt Mm′ den Bogen Mm substituirt hat, so ist letztere Gleichung keine vollständige, aber doch auch keine falsche (§. 233, VII. Zus.), sondern eine unvollständige Gleichung.

Zusatz: Aus dem Verhältnisse der Differentialen von der Abscisse und Ordinate läßt sich umgekehrt die Gleichung der krummen Linie finden;

denn aus $dy = \frac{adx - 2xdx}{2y}$, wird

$2ydy = adx - 2xdx$, mithin

$\int 2ydy = \int(adx - 2xdx)$, oder

$y^2 = ax - x^2 + C$ (§. 326, Arithmetik). Da nun für $x = 0$; auch $y^2 = 0$ ist, so wird $0 = 0 - 0 + C$, mithin $C = 0$, folglich $y^2 = ax - x^2$; diese Gleichung, da sie keine

keine Hilfsgrößen mehr enthält, ist eine vollständige (§. 301, Arithm.)

Anmerkung: Wenn in der Folge einer Größe das Zeichen d oder ∫ vorgesetzt ist, so bezeichnet erstere das Differential, letzteres das Integral dieser Größe, so wie C allemal die beständige Größe vorstellt.

§. 235.

Erklärung:

a) Eine krumme Linie heißt entweder algebraisch oder transcendent, je nachdem ihre Gleichung eine algebraische oder transcendente ist (§. 186, Arithm.)

b) Eine algebraische krumme Linie heißt eine Linie der zweyten, dritten, ... nten Ordnung, je nachdem ihre Gleichung eine von dieser Ordnung ist; das heißt, je nachdem der höchste Exponent einer veränderlichen Größe x, y oder die höchste Summe beyder Exponenten eines Gliedes, in der geordneten Gleichung einer algebraischen krummen Linie, 2, 3, ... oder n ist.

1. Zusatz: Die Gleichung $y^2 = ax - x^2$ gehört für eine Linie der zweyten, hingegen $y^2 = px^3$, so wie auch $a^2y + x^2y = ax^2$ für eine Linie der dritten Ordnung.

II. Zusatz: Die Gleichung; $y = a + bx + \frac{bx^2}{1 \cdot 2} + \frac{bx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{bx^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots\ldots + \frac{bx^\infty}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \infty}$ gehört für eine transcendente Linie.

II. Abschnitt.

Von trigonometrischen Differentialen, und von der Integration durch Kreisbögen.

§. 236.

Lehrsätze:

Wenn Z einen Kreisbogen für den Halbmesser a bezeichnet, so ist:

$$\text{I. } d \sin. Z = \frac{\cos. Z dZ}{a}$$

$$\text{II. } d \cos. Z = -\frac{\sin. Z dZ}{a}$$

Anmerkung: Um den Gegenstand aus mehrern Standpuncten dem Anfänger deutlich zu machen, setze ich zwey verschiedene Beweise aus.

I.

I. Beweis:

1. Offenbar ist $d\ \text{sin.}\ Z = \text{sin.}\ (Z + dZ) - \text{sin.}\ Z$, und $d\ \text{cos.}\ Z = \text{cos.}\ (Z + dZ) - \text{cos.}\ Z$.

3. Beziehen sich nun *sin.*, *cos.* auf den Halbmesser $= 1$ gesetzt, so ist

3. $\mathit{sin.}\ (Z + dZ) = \mathit{sin.}\ Z\ \mathit{cos.}\ dZ + \mathit{cos.}\ Z\ \mathit{sin.}\ dZ$ (§. 306, Trigonom.)
$\mathit{cos.}\ (Z + dZ) = \mathit{cos.}\ Z\ \mathit{cos.}\ dZ - \mathit{sin.}\ Z\ \mathit{sin.}\ dZ$ (§. 308, Trigonom.)

4. Da aber sin., cos. für den Halbmesser $= a$ gehören, so ist

$$\mathit{sin.}\ (Z + dZ) = \frac{\text{sin.}\ (Z + dZ)}{a}; \text{ und}$$

$$\mathit{sin.}\ Z\ \mathit{cos.}\ dZ + \mathit{cos.}\ Z\ \mathit{sin.}\ dZ = \frac{\text{sin.}\ Z\ \text{cos.}\ dZ + \text{cos.}\ Z\ \text{sin.}\ dZ}{a^2}$$ (§. 305, II. Zusatz, Trigonom.) Eben so

$$\mathit{cos.}\ (Z + dZ) = \frac{\text{cos.}\ (Z + dZ)}{a}, \text{ und}$$

$$\mathit{cos.}\ Z\ \mathit{cos.}\ dZ - \mathit{sin.}\ Z\ \mathit{sin.}\ dZ = \frac{\text{cos.}\ Z\ \text{cos.}\ dZ - \text{sin.}\ Z\ \text{sin.}\ dZ}{a^2},$$ folglich diese Werthe Statt Nr. 3 gesetzt,

5. $$\text{sin.}\ (Z + dZ) = \frac{\text{sin.}\ Z\ \text{cos.}\ dZ + \text{cos.}\ Z\ \text{sin.}\ dZ}{a}$$

$$\text{cos.}\ (Z + dZ) = \frac{\text{cos.}\ Z\ \text{cos.}\ dZ - \text{sin.}\ Z\ \text{sin.}\ dZ}{a}$$

6.

6. Nun ist dZ unendlich klein, mithin wird sin. dZ = dZ, und cos. dZ = a; also

7. $\text{sin.}(Z + dZ) = \frac{\text{sin. } Z \times a + \text{cos. } ZdZ}{a}$

$\text{cos.}(Z + dZ) = \frac{\text{cos. } Z \times a - \text{sin. } ZdZ}{a}$;

folglich aus Nr. 1.

8. $d \text{ sin. } Z = \frac{\text{sin. } Z \times a + \text{cos. } ZdZ}{a} - \text{sin. } Z$

$= \frac{\text{cos. } ZdZ}{a}$

$d \text{ cos. } Z = \frac{\text{cos. } Z \times a - \text{sin. } ZdZ}{a}$

$- \text{cos. } Z = - \frac{\text{sin. } ZdZ}{a}$

Diese beyden Gleichungen sind aber wegen der Substitution Nr. 6 unvollständige Gleichungen.

II. Beweis: (Fig. 83)

9. Man ziehe für den Bogen AB = Z, seinen Sinus BE und Cosinus CE.

10. Nun wachse der Bogen um den beliebigen kleinen Theil Bb, und man ziehe den Sinus be des Bogens Ab = Z′, und durch B zu AC die Parallele Bm, so ist

11. der kleinere Bogen Bb = Z′ − Z = dZ; BE = sin. Z; CE = cos. Z; be = sin. Z′; Ce = cos. Z′; also

bm = sin. Z′ − sin. Z = d sin. Z, und

Bm

$Bm = Ee = \cos. Z - \cos. Z' = -(\cos. Z' - \cos. Z)$ $= - d \cos. Z$. Ferner $AC = BC = a$.

12. Nun ist $\alpha + \beta = 90° = \beta + \gamma$, also $\alpha = \gamma$; $m = E$, folglich $\triangle Bmb \backsim \triangle BEC$, wo man den Bogen Bb als einen Theil der Tangens nimmt (§. 233, VII. Zus.), mithin

13. $BC : CE = Bb : bm$, oder
$a : \cos. Z = dZ : d \sin. Z$, mithin

$$\text{I. } d \sin. Z = \frac{\cos. ZdZ}{a}$$

14. Ferner: $BC : BE = Bb : Bm$,
oder $a : \sin. Z = dZ : - d \cos. Z$, also

$$- d \cos. Z = \frac{\sin. ZdZ}{a}, \text{ und}$$

$$\text{II. } d \cos. Z = - \frac{\sin. ZdZ}{a},$$ beyde Gleichungen aber sind unvollständige Gleichungen vermöge Nr. 12.

I. Zusatz: $d . \sin. \text{vers. } Z = d (a - \cos. Z)$ (§. 297, Trigon.) $= - d \cos. Z = \frac{\sin. ZdZ}{a}$

II. Zusatz: $d \cos. \text{vers. } Z = d (a - \sin. Z) = - d \sin. Z$ $= - \frac{\cos. ZdZ}{a}$

III.

III. Zusatz: Für den Halbmesser a = 1 wird

$d \sin. Z = dZ \cos. Z$; und

$d \cos. Z = - dZ \sin. Z$; also umgekehrt

$\int dZ \cos. Z = \sin. Z + C$, und

$\int dZ \sin. Z = - \cos. Z + C$.

IV. Zusatz: Setzt man mZ Statt Z, so ist

$d \sin. mZ = d(mZ) \cos. mZ = mdZ \cos. mZ$, und

$bd Z \cos. mZ = \frac{bd \sin. mZ}{m}$; folglich

$\int bdZ \cos. mZ = \frac{b \sin. mZ}{m} + C$.

V. Zusatz: Eben so ist:

$d \cos. mZ = - d(mZ) \sin. mZ = - mdZ \sin. Zm$,

also $bd Z \sin. mZ = - \frac{bd \cos. mZ}{m}$; folglich

$\int bd Z \sin. mZ = - \frac{b . \cos mZ}{m} + C$.

VI. Zusatz: $b \sin. Z^m d \sin. Z = bdZ \cos. Z \sin. Z^m$ (III. Zusatz),

also $\int bdZ \cos. Z \sin. Z^m = \frac{b \sin. Z^{m+1}}{m+1} + C$

(§. 324, Arithm.)

VII. Zusatz: $b \cos. Z^m d \cos. Z = - bdZ \sin Z \cos. Z^m$, mithin

$\int bdZ \sin. Z \cos. Z^m = - \frac{b \cos. Z^{m+1}}{m+1} + C$.

VIII. Zusatz:

dZ sin. mZ cos. $nZ = dZ\ [\frac{1}{2}$ sin. $(mZ + nZ)$ $+ \frac{1}{2}$ sin. $(mZ - nZ)]$ (§. 307, II. Zus. Trigon.) $= \frac{1}{2} dZ$ sin. $(m + n)\ Z + \frac{1}{2} dZ$ sin. $(m - n)\ Z$; folglich

$$\int dZ \text{ sin. } mZ \text{ cos. } nz = -\frac{\text{cos. } (m + n)\ Z}{2\ (m + n)}$$

$$-\frac{\text{cos. } (m - n)\ Z}{2\ (m - n)} + C \text{ (V. Zus.)}$$

IX. Zusatz:

dZ sin. mZ sin. $nZ = dZ\ [\frac{1}{2}$ cos. $(mZ - nZ)$ $- \frac{1}{2}$ cos. $(mZ + nZ)]$ (§. 309, III. Zus. Trigonom.) $= \frac{1}{2} dZ$ cos. $(m - n)\ Z$ $- \frac{1}{2} dZ$ cos. $(m + n)\ Z$, folglich

$$\int dZ \text{ sin. } mZ \text{ sin. } nZ = \frac{\text{sin. } (m - n)\ Z}{2\ (m - n)}$$

$$-\frac{\text{sin. } (m + n)}{2\ (m + n)} + C \text{ (IV. Zus.)}$$

X. Zusatz:

dZ cos. mZ cos. $nZ = dZ\ [\frac{1}{2}$ cos. $(mZ - nZ)$ $+ \frac{1}{2}$ cos. $(mZ + nZ)]$ §. 309, II. Zus. Trig.) $= \frac{1}{2} d\,Z$ cos. $(m - n)\ Z + \frac{1}{2} dZ$ cos. $(m + n)\ Z$;

also $\int dZ$ cos. mZ cos. $nZ = \frac{\text{sin. } (m - n)\ Z}{2\ (m - n)}$

$$+\frac{\text{sin. } (m + n)}{2\ (m + n)} + C \text{ (IV. Zusatz).}$$

§. 237.

Lehrsatz:

Für den Bogen Z und den Halbmesser a, ist

$$d\ \text{tang. } Z = \frac{a^2 dZ}{\cos. Z^2}.$$

Beweis:

1. $d\ \text{tang. } Z = d\ \frac{a\ \sin. Z}{\cos. Z}$ (§. 301, Trigonom.)

$$= \frac{a \cos. Z\, d \sin. Z - a \sin. Z\, d \cos. Z}{\cos. Z^2}$$

(§. 308, Arithmetik).

2. Nun ist $\cos. Zd \sin. Z = \cos. Z \cdot \frac{\cos. ZdZ}{a}$ (§. 236), mithin $a \cos. Zd \sin. Z = \cos. Z^2 dZ$.

3. Eben so $\sin. Zd \cos. Z = \sin. Z \times - \frac{\sin. ZdZ}{a}$, also $- a \sin. Z\, d \cos. Z = \sin. Z^2 dZ$, mithin Nr. 1.

4. $d\ \text{tang. } Z = \frac{\cos. Z^2 dZ + \sin. Z^2 dZ}{\cos. Z^2}$

$$= \frac{(\cos. Z^2 + \sin. Z^2)\, dZ}{\cos. Z^2} = \frac{a^2 dZ}{\cos. Z^2}$$

(§. 296, Trigonometrie).

§. 238.

§. 238.

Lehrsatz:

$$d\ \cot.\ Z = -\frac{a^2 dZ}{\sin.\ Z^2};$$ wo Z den Bogen und a den Halbmesser bezeichnen.

Beweis:

1. $d\ \cot.\ Z = d\ \frac{a\ .\ \cos.\ Z}{\sin.\ Z}$ (§. 303, Trigonom.)

$$= \frac{a \sin.\ Z\ d\ \cos.\ Z - a \cos.\ Z.\ d\ \sin.\ Z}{\sin.\ Z^2}$$

(308, Arithmetik.)

2. Nun ist wieder aus §. 236
$a \sin.\ Z\ d\ \cos.\ Z = - \sin.\ Z^2 dZ$, und
$- a \cos.\ Z\ d \sin.\ Z = - \cos.\ Z^2 dZ$; mithin

3. $$d\ \cot.\ Z = - \frac{\sin.\ Z^2\ dZ + \cos.\ Z^2 dZ}{\sin.\ Z^2}$$

$$= - \frac{(\sin.\ Z^2 + \cos.\ Z^2)\ dZ}{\sin.\ Z^2} = - \frac{a^2 dZ}{\sin.\ Z^2}.$$

§. 239.

Lehrsatz:

Für den Bogen Z und Halbmesser a ist:

$$d\ \sec.\ Z = \frac{\tan g.\ Z dZ}{\cos.\ Z} = \frac{\tan g.\ Z\ \sec.\ Z dZ}{a^2}$$

Be-

Beweis:

1. $d \sec. Z = d \frac{a^2}{\cos. Z}$ (§. 302, Trigonom.)

$$= - \frac{a^2 d \cos. Z}{\cos. Z^2}$$

2. Nun ist $d \cos. Z = - \frac{\sin. ZdZ}{a}$ (§. 236), mithin $- a^2 d \cos. Z = a \sin. ZdZ$, folglich

3. $d \sec. Z = \frac{a \sin. ZdZ}{\cos. Z^2} = \frac{\text{tang. } ZdZ}{\cos. Z}$

(§. 301, Trigonometrie),

$$= \text{tang. } ZdZ \times \frac{a^2}{a^2 \cos. Z} = \frac{\text{tang. } Z \sec. ZdZ}{a^2}$$

(§. 302, Trigonometrie).

§. 240.

Lehrsatz:

Für den Halbmesser a ist

$$d \operatorname{cosec.} Z = - \frac{\cot. ZdZ}{\sin. Z}$$

$$= - \frac{\cot. Z \operatorname{cosec.} ZdZ}{a^2}.$$

Beweis:

1. $d \operatorname{cosec.} Z = d \frac{a^2}{\sin. Z}$ (§. 304, Trigonom.)

 =

$$= -\frac{a^2 \, d \sin. Z}{\sin. Z^2}$$

2\. mithin $d \operatorname{cosec}. Z = -\frac{a \cos. ZdZ}{\sin. Z^2}$ (§. 236).

$$= -\frac{\cot. ZdZ}{\sin. Z} = -\cot. ZdZ \times \frac{a^2}{a^2 \sin. Z}$$

$$= -\frac{\cot. Z \operatorname{cosec}. ZdZ}{a^2}$$

§. 241.

Lehrsatz:

Wenn x den Sinus des Bogens Z vom Halbmesser a ausdrückt, so ist

$$d\,(\text{Arc}. \sin. x) = adx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis:

1\. $d \sin. Z = \frac{\cos. ZdZ}{a}$ (§. 236)

$$= \frac{dZ \sqrt{(a^2 - \sin. Z^2)}}{a}$$ (§. 296, Trigonom.)

2\. Wenn nun $x = \sin. Z$; so ist $Z = \text{Arc}. \sin. x$, das heißt, Z ist der Bogen, welchem x als Sinus für den Halbmesser a entspricht;

3\. Ferner $d \sin. Z = dx$; und $dZ = d\,(\text{Arc}. \sin. x)$.

4\. Setzt man diese Werthe in der Gleichung Nr. 1; so wird

5.

5. $dx = \frac{d(\text{Arc. sin, } x)\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$, folglich

6. $d(\text{Arc. sin. } x) = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

$= adx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 104, III. Zus. Arithm.)

I. Zusatz: $\int adx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc sin. } x + C.$

II. Zusatz: In der vorhergehenden Formel bezieht sich Arc. auf einen Kreis, dessen Halbmesser $= a$ ist. Drückt nun arc. den Bogen eines Kreises aus, dessen Radius $= 1$ ist, so wird

$\text{Arc. sin. } x = a \,.\, \text{arc. sin. } \frac{x}{a}$

Denn Z' bezeichne einen Bogen, und x' den Sinus desselben, für den Halbmesser $= 1$, so daß Z' mit Z gleich viele Grade hält, so ist
$x' = \sin. Z'$; und $Z' = \text{arc. sin. } x'$.
Ferner $x' : x = 1 : a$ (§. 305, Trig.), mithin

$x' = \frac{x}{a}$; also $Z' = \text{arc. sin. } \frac{x}{a}$;

Endlich $Z : Z' = a : 1$ (§. 126, IV. Zusatz, Geometrie), folglich $Z = aZ'$; das ist:

$\text{Arc. sin. } x = a \,.\, \text{arc. sin. } \frac{x}{a}$

III. Zusatz: Wenn arc. sich auf einen Kreis bezieht, dessen Halbmesser $= 1$ ist, so wird

$\int dx$

$\int dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{arc. sin.}\,\frac{x}{a} + C$; denn

$\int a dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc. sin.}\,x + C$ (I. Zus.)

$= a\,.\,\text{arc. sin.}\,\frac{x}{a} + C$

(II. Zusatz), mithin

$\int dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{arc. sin.}\,\frac{x}{a} + C.$

IV. Zusatz: $\int b x^0 dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = b\,.\,\text{arc. sin.}\,\frac{x}{a} + C.$

§. 242.

Aufgabe:

Wenn $a = 24$, $b = 2$; $x = 18$; nebst der Differentialgleichung $dZ = b x^0 dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ gegeben ist, die Größe Z anzugeben.

Auflösung:

1. Da $\int b x^0 dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = b\,.\,\text{arc. sin.}\,\frac{x}{a} + C$ (§. 241, IV. Zus.), so ist

$Z = b\,.\,\text{arc. sin.}\,\frac{x}{a} + C.$

2. Wenn nun bekannt ist, daß für $x = 0$ auch $Z = 0$ wird, so ist ebenfalls $C = 0$, mithin

3.

3. $Z = b \,.\, \text{arc. sin.} \frac{x}{a}$.

4. Nun ist $\frac{x}{a} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0{,}7500000$.

5. Diesem Sinus entspricht aber aus den Tabellen für den Halbmesser 1 ein Bogen von 48°36′.

6. Für eben den Halbmesser 1 ist aber die Länge dieses Bogens; oder arc. 48° = 0,837758
arc. 36′ = 0,010471

mithin $\text{arc. sin.} \frac{x}{a} = 0{,}848229$;

folglich

6. $b \,.\, \text{arc. sin.} \frac{x}{a} = 2 \times 0{,}848229$, das ist
$Z = 1{,}696458$

§. 243.

Lehrsatz:

Wenn x für den Halbmesser a den Cosinus des Kreisbogens Z ausdrückt, so ist:

$$d\,(\text{Arc. cos. } x) = -\,adx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis:

1. $d \cos. Z = -\frac{\sin. Z dZ}{a}$ (§. 236)

$$= -\frac{dZ \sqrt{(a^2 - \cos. Z^2)}}{a}.$$

2. Nun ist cos. $Z = x$; also $z = $ Arc. cos. x, mithin d cos. $Z = dx$; $dZ = d$ (Arc. cos. x), folglich giebt die vorhergehende Gleichung:

3. $$dx = -\frac{d\,(\text{Arc. cos. } x)\,\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a},$$
mithin

4. $$d\,(\text{Arc. cos. } x) = -\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$
$$= -a\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

I. Zusatz: $\int -a\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc. cos. } x + C.$

II. Zusatz: Wenn nun arc. den Bogen für den Radius $= 1$ bezeichnet, so ist aus den nemlichen Gründen, wie §. 241, II. Zusatz

$$\text{Arc. cos. } x = a\,.\,\text{arc. cos. } \frac{x}{a},$$ also

III. Zusatz: $\int -a\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = a\,.\,\text{arc. cos. } \frac{x}{a} + C$, oder

$$\int -dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{arc. cos. } \frac{x}{a} + C;$$ folglich

IV. Zusatz: $\int -b\,x^0\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$$= b\,.\,\text{arc. cos. } \frac{x}{a} + C.$$

§. 244.

Lehrsatz:

Wenn x die Tangens des Bogens Z für den Halbmesser a ausdrückt, so ist:

$$d\,(\text{Arc. tang. } x) = a^2 dx\,(a^2 + x^2)^{-1}.$$

Beweis:

1. $d \text{ tang. } Z = \dfrac{a^2 dZ}{\cos. Z^2}$ (§. 237).

2. Ferner ist $\text{tang. } Z^2 = \dfrac{a^2 \sin. Z^2}{\cos. Z^2}$ (§. 301, Trigonometrie)

$$= \frac{a^2 (a^2 - \cos. Z^2)}{\cos. Z^2},$$

mithin

$\text{tang. } Z^2 \cos. Z^2 = a^4 - a^2 \cos. Z^2;$

$\cos. Z^2 (a^2 + \text{tang. } Z^2) = a^4;$ also

3. $\cos. Z^2 = \dfrac{a^4}{a^2 + \text{tang. } Z^2}$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung Nr. 1, so wird

4. $d \text{ tang. } Z = a^2\, dZ \times \dfrac{a^2 + \text{tang. } Z^2}{a^4}$

$$= \frac{dZ\,(a^2 + \text{tang. } Z^2)}{a^2}$$

5. Nun ist tang. $Z = x$; also $Z = \text{Arc. tang } x$; mithin d tang. $Z = dx$; $dZ = d\,(\text{Arc. tang. } x)$, also

6. $$dx = \frac{d\,(\text{Arc. tang. } x)\,(a^2 + x^2)}{a^2}\text{; folglich}$$

7. $$d\,(\text{Arc. tang. } x) = \frac{a^2dx}{a^2 + x^2}$$

$$= a^2dx\,(a^2 + x^2)^{-1}.$$

I. Zusatz: $\int a^2dx\,(a^2 + x^2)^{-1} = \text{Arc. tang } x + C.$

II. Zusatz: Will man den Bogen für den Halbmesser 1 oder arc. setzen, so ist wie §. 241, II. Zus.

$\text{Arc. tang. } x = a \,.\, \text{arc. tang. } \frac{x}{a}$, also

III. Zusatz: $\int a^2dx\,(a^2 + x^2)^{-1}$

$= a \,.\, \text{arc. tang. } \frac{x}{a} + C$, oder

$\int dx\,(a^2 + x^2)^{-1} = \frac{1}{a}\,\text{arc. tang. } \frac{x}{a} + C$, folglich

IV. Zusatz: $\int bx^0\,dx\,(a^2 + x^2)^{-1} = \frac{b}{a}$ $\text{arc. tang. } \frac{x}{a} + C.$

§. 245.

Lehrsatz:

Wenn x die Cotangens des Bogens Z für den Halbmesser a bezeichnet, so ist

$$d\,(\text{Arc. cot. } x) = -\,a^2dx\,(a^2 - x^2)^{-1}.$$

Beweis:

1. $d \text{ cot. } Z = -\dfrac{a^2\,dZ}{\text{sin. } Z^2}$ (§. 238).

2. Ferner ist $\text{cot. } Z^2 = \dfrac{a^2 \text{ cos. } Z^2}{\text{sin. } Z^2}$ (§. 303,

$$= \frac{a^2(a^2 - \text{sin.} Z^2)}{\text{sin. } Z^2}, \text{ also}$$

$\text{cot. } Z^2 \text{ sin.} Z^2 = a^4 - a^2 \text{ sin. } Z^2$, und
$\text{sin. } Z^2\,(a^2 + \text{cot. } Z^2) = a^4$, mithin

3. $\text{sin. } Z^2 = \dfrac{a^4}{a^2 + \text{cot. } Z^2}$, folglich Nr. 1

4. $d \text{ cot. } Z = -\,a^2dZ \times \dfrac{a^2 + \text{cot. } Z^2}{a^4}$.

$$= -\frac{dZ\,(a^2 + \text{cot. } Z^2)}{a^2}$$

5. Nun ist $\text{cot. } Z = x$; also $Z = \text{Arc. cot. } x$, und $d \text{ cot. } Z = dx$; $dZ = d\,(\text{Arc. cot. } x)$, folglich

6. $dx = -\dfrac{d\,(\text{Arc. cot. } x)\,(a^2 + x^2)}{a^2}$, und

7. $d\,(\text{Arc. cot. } x) = -\dfrac{a^2\,dx}{a^2 + x^2}$

$= -\,a^2dx\,(a^2 + x^2)^{-1}$.

I. Zusatz: $\int -\,a^2dx\,(a^2 + x^2)^{-1} = \text{Arc. cot. } x + C$.

II. Zusatz: Drückt arc. einen Bogen für den Halbmesser 1 aus, so ist $\text{Arc. cot. } x = a\,.\,\text{arc. cot.}\dfrac{x}{a}$ (§. 241, II. Zusatz), mithin

III. Zusatz: $\int -\,a^2\,dx\,(a^2 + x^2)^{-1}$

$= a\,.\,\text{arc. cot. } \dfrac{x}{a} + C$, oder

$\int -\,dx\,(a^2 + x^2)^{-1} = \dfrac{1}{a}\ \text{arc. cot. } \dfrac{x}{a} + C$; folglich

IV. Zusatz: $\int -\,b\,dx\,(a^2 + x^2)^{-1} = \dfrac{b}{a}\ \text{arc. cot. } \dfrac{x}{a} + C$.

§. 246.

Lehrsatz:

Wenn x die Secans des Bogens Z für den Halbmesser a bezeichnet, so ist:

d

$$d\,(\text{Arc. sec. } x) = a^2 x^{-1}\, dx\, (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Beweis:

1. $d \text{ sec. } Z = \dfrac{dZ \text{ tang. } Z \text{ sec. } Z}{a^2}$ (§. 239)

$$= \frac{dZ \text{ sec. } Z \sqrt{(\text{sec. } Z^2 - a^2)}}{a^2}$$

(§. 300, Trigonometrie).

2. Nun ist $\sec Z = x$; also $Z = \text{arc. sec. } x$, und $d \text{ sec. } Z = dx$; $dZ = d\,(\text{Arc. sec. } x)$, mithin

3. $dx = \dfrac{d\,(\text{Arc. sec. } x)\, x \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a^2}$; folglich

4. $d\,(\text{Arc. sec. } x) = \dfrac{a^2\, dx}{x \sqrt{(x^2 - a^2)}}$

$$= a^2 x^{-1}\, dx\, (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

I. Zusatz: $\int a^2 x^{-1}\, dx\, (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$
$= \text{Arc. sec. } x\, .+ C.$

II. Zusatz: Will man arc., das ist, den Bogen für den Halbmesser 1 substituiren, so ist wieder (§. 241, II. Zus.) $\text{Arc. sec. } x = a\,.\,\text{arc. sec. } \dfrac{x}{a}$ mithin

III. Zusatz: $\int a^2 x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= a \,.\, \text{arc. sec.} \frac{x}{a} + C$, oder

$\int x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}$

$\text{arc. sec.} \frac{x}{a} + C.$

IV. Zusatz: Wenn nun $Z' = \text{arc. sec.} \frac{x}{a}$ gesetzt wird, so ist $\frac{x}{a} = \text{sec.}\ Z' = \frac{1}{\cos.\ Z'}$ (§. 302, Trigonometrie), mithin

$\cos.\ Z' = \frac{a}{x}$, und folglich

$Z' = \text{arc. cos.} \frac{a}{x} = \text{arc. sec.} \frac{x}{a}$; mithin

V. Zusatz: $\int x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}$

$\text{arc. cos.} \frac{a}{x} + C$, und

VI. Zusatz: $\int b x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{b}{a} \text{arc. sec.} \frac{x}{a} + C.$

$= \frac{b}{a} \text{arc. cos.} \frac{a}{x} + C.$

§. 247.

§. 247.

Lehrsatz:

Wenn x die Consecans des Bogens Z für den Halbmesser a ausdrückt, so ist:

$$d\,(\text{Arc. cosec. } x) = -\,a^2x^{-1}\,dx\,(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis:

1. $d\,\text{cosec. } Z = -\dfrac{dZ\,\text{cosec. } Z\,\text{cot. } Z}{a^2}$ (§. 240)

$$= -\frac{dZ\,\text{cosec. } Z\,\sqrt{(\text{cosec. } Z^2 - a^2)}}{a^2}$$

(§. 304, Trigonometrie).

2. Nun ist cosec. $Z = x$; also $Z = $ Arc. cosec. x, und d cosec. $Z = dx$; $dZ = d$ (Arc. cosec. x), mithin

3. $dx = -\dfrac{d\,(\text{Arc. cosec. } x)\,x\,\sqrt{(x^2 - a^2)}}{a^2}$;

folglich

4. $d\,(\text{Arc. cosec. } x) = -\dfrac{a^2dx}{x\sqrt{(x^2 - a^2)}}$

$$= -\,a^2x^{-1}\,dx\,(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

I. Zusatz: $\int -\,a^2x^{-1}\,dx\,(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$
$=$ Arc. cosec. $x + C$.

II. Zusatz: Will man arc., das ist, den Bogen für den Halbmesser 1 substituiren, so ist

Arc.

$$\text{Arc. cosec. } x = a \text{ . arc. cosec. } \frac{x}{a}, \text{ mithin}$$

III. Zusatz: $\int - a^2 x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= . a \text{ arc. cosec. } \frac{x}{a} + C, \text{ oder}$$

$$\int - x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}$$

$$\text{arc. cosec. } \frac{x}{a} + C.$$

IV. Zusatz: Setzt man $Z' = \text{arc. cosec. } \frac{x}{a}$;

mithin $\frac{x}{a} = \text{cosec. } Z' = \frac{1}{\text{sin. } Z'}$ (§. 304, Trigonometrie), also

$$\text{sin. } Z' = \frac{a}{x}; \text{ so ist}$$

$$Z' = \text{arc. sin. } \frac{a}{x} = \text{arc. cosec. } \frac{x}{a},$$

folglich

V. Zusatz: $\int - x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{a} \text{ arc. sin. } \frac{a}{x} + C, \text{ und}$$

VI. Zusatz: $\int - b x^{-1} dx (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{b}{a} \text{ arc. cosec. } \frac{x}{a} + C.$$

$$= \frac{b}{a} \text{ arc. sin. } \frac{a}{x} + C.$$

§. 248.

Lehrsatz:

Wenn x den Sinusversus des Bogens Z für den Halbmesser a bezeichnet, so ist:

$$d\,(\text{Arc. sin. vers. } x) = a x^{-\frac{1}{2}} dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= a x^{-1} dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Beweis:

1. $d \text{ sin. vers. } Z = \frac{dZ \text{ sin. } Z}{a}$ (§. 236. I. Zus.)

$$= \frac{dZ \sqrt{(a^2 - \text{cos. } Z^2)}}{a}$$

2. Nun ist $\text{cos. } Z = a - \text{sin. vers. } Z$ (§. 297. Trigon.

also $\text{cos. } Z^2 = a^2 - 2\,a \text{ sin. vers. } Z + \text{sin. vers. } Z^2$, mithin

$a^2 - \text{cos. } Z^2 = 2\,a \text{ sin. vers. } Z - \text{sin. vers. } Z^2$

folglich

3. $d \text{ sin. vers. } Z = \frac{dZ \sqrt{(2a \text{ sin. vers. } Z - \text{sin. vers} Z^2)}}{a}$

4. Ferner ist $\text{sin. vers } Z = x$, also $Z = \text{Arc. sin. vers. } x$, und

$d \text{ sin. vers. } Z = dx$; $dZ = d(\text{Arc. sin vers. } x)$

folglich

5. $dx = \frac{d\,(\text{Arc. sin. vers. } x) \sqrt{(2ax - x^2)}}{a}$ und

6. $d\,(\text{Arc. sin. vers. } x) = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$

$= adx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= ax^{-\frac{1}{2}}dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 329. Arithm.)

$= ax^{-1}\,dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 330. Arithm.)

I. Zusatz: $\int adx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int ax^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int ax^{-1}\,dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$= \text{Arc. sin. vers. } x + C$

II. Zusatz: Wenn man arc. oder den Bogen für den Halbmesser 1 setzt, so ist Arc. sin. vers. x

$= a \text{ arc sin. vers.} \frac{x}{a}$

folglich

III. Zusatz: $\int ax^{-1}\,dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$= a.\ \text{arc. sin. vers. } \frac{x}{a}$, und

$\int dx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}$

$= \int x^{-1}\,dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$= \text{arc. sin. vers. } \frac{x}{a} + C.$

IV.

IV. Zusatz: Nun setze man $Z' = \text{arc. sin. vers.} \frac{x}{a}$ also

$$\frac{x}{a} = \text{sin. vers. } Z' = 1 - \cos. Z', \text{ mithin}$$

$$\cos. Z' = 1 - \frac{x}{a} = 1 - \frac{2x}{2a}; \text{ folglich}$$

$$Z' = \text{arc. cos. } \left(1 - \frac{2x}{2a}\right) = \text{arc. sin. vers. } \frac{x}{a}$$

Setzt man endlich noch $2a = c$, so wird

V. Zusatz: $\int dx\,(cx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}} dx\,(c - x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int x^{-1} dx\,(cx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \text{arc. cos. } \left(1 - \frac{2x}{c}\right) + C; \text{ folglich}$$

VI. Zusatz: $\int b dx\,(cx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \int b x^{-\frac{1}{2}} dx\,(c - x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int b x^{-1} dx\,(cx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= b \text{ arc. cos. } \left(1 - \frac{2x}{c}\right) + C$$

§. 249.

Lehrsatz:

Wenn x den Cosinusversus des Bogens Z für den Halbmesser a bezeichnet, so ist:

$$d\,(\text{Arc. cos. vers. } x) = -\,adx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -\,ax^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -\,ax^{-1}\,dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Beweis:

1. $d\ \text{cos. vers. } Z. = -\dfrac{dZ\ \cos Z}{a}$ (§. 236. II. Zus.)

$$= -\frac{dZ\sqrt{(a^2 - \text{sin. } Z^2)}}{a}$$

2. Nun ist $\text{sin. } Z = a - \text{cos. vers. } Z$, also
$\text{sin } Z^2 = a^2 - 2a\ \text{cos. vers. } Z + \text{cos. vers. } Z^2$, und
$a^2 - \text{sin. } Z^2 = 2a\ \text{cos. vers. } Z - \text{cos. vers. } Z^2$
mithin

3. $d\ \text{cos. vers. } Z$
$$= -\frac{dZ\sqrt{(2a\ \text{cos. vers. } Z - \text{cos. vers. } Z^2)}}{a}$$

4. Ferner ist $\text{cos. vers. } Z = x$, also
$Z = \text{Arc. cos. vers. } x$, und $d\ \text{cos. vers. } Z = dx$;
$dZ = d\,(\text{Arc. cos. vers. } x)$, folglich

5. $dx = -\dfrac{d\,(\text{Arc. cos. vers. } x)\sqrt{(2ax - x^2)}}{a}$

und

6. $d(\text{Arc. cos. vers. } x) = -\dfrac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$

$$= -\,adx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -\,ax^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}\ (\text{§. 329. Arith.})$$
$$= -\,ax^{-1}\,dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$
(§ 330. Arithm.)

I. Zusatz: $\int -adx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$=$ Arc. cos. vers. $x + C$

II. Zusatz: Nimmt man den Bogen für den Halbmesser $= 1$ oder arc.; so ist Arc. cos. vers. x $=$ a. arc. cos. vers. $\frac{x}{a}$, also

III. Zusatz: $\int -adx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$=$ a arc. cos. vers. $\frac{x}{a} + C$; und

$\int -dx\,(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$= \int -x^{-\frac{1}{2}}dx\,(2a - x)^{-\frac{1}{2}}$
$= \int -x^{-1}dx\,(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$
$=$ arc. cos. vers. $\frac{x}{a} + C$

IV. Zusatz: Nun setze man $Z' =$ arc. cos. vers. $\frac{x}{a}$
also
$\frac{x}{a} =$ cos. vers. $Z' = 1 -$ sin. Z', so ist
Sin. $Z' = 1 - \frac{x}{a} = 1 - \frac{2x}{2a}$; folglich
$Z' =$ arc. sin. $\left(1 - \frac{2x}{2a}\right) =$ arc. cos. vers. $\frac{x}{a}$
Setzet man endlich noch $2a = c$, so wird

V.

V. Zusatz: $\int - dx\,(cx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \int - x^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(c - x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int - x^{-1}\,dx\,(cx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \text{arc. sin.} \left(1 - \frac{2x}{c}\right) + C;$$ folglich

VI. Zusatz: $\int - b\,dx\,(cx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \int - bx^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(c - x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int - bx^{-1}\,dx\,(cx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= b\;\text{arc. sin.} \left(1 - \frac{2x}{c}\right) + C$$

§. 250.

Lehrsatz:

$$\int dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} a^2\,\text{arc. sin.}\,\frac{x}{a} + \tfrac{1}{2} x \sqrt{(a^2 - x^2)} + C$$

Beweis:

1. $dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

2. ferner $\tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{\tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \tfrac{1}{2} a^2\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \tfrac{1}{2} x^2\,dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

3.

3. Substituirt man diese Werthe statt des lezten Gliedes in der Gleichung Nro 1, so wird

4. $\int dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \int [\tfrac{1}{2} dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$
$- \tfrac{1}{2} x^2\, dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}] + \int \tfrac{1}{2} a^2 dx (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

5. $\int \tfrac{1}{2}\, a^2\, dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\, a^2$ arc. sin. $\frac{x}{a}$
(§. 241. IV. Zus.)

6. Ferner $d(\tfrac{1}{2} x \sqrt{(a^2 - x^2)}) = \tfrac{1}{2}\, dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$
$- \tfrac{1}{2}\, x^2\, dx\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 307. Arithm.)
also umgekehrt

7. $\int [\tfrac{1}{2}\, dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} x^2\, dx (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}]$
$= \tfrac{1}{2}\, x \sqrt{(a^2 - x^2)}$, folglich

8. $\int dx\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\, a^2$ arc. sin. $\frac{x}{a}$
$+ \tfrac{1}{2}\, x \sqrt{(a^2 - x^2)} + C$

I. Zusatz: $\int b x^0\, dx (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\, a^2$ b. arc. sin. $\frac{x}{a}$
$+ \tfrac{1}{2}\, bx \sqrt{(a^2 - x^2)} + C$

II. Zusatz: $\int -\, dx\,(2\,ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$
$= \tfrac{1}{2}\, a^2$ arc. sin. $(1 - \frac{2x}{2a})$
$+ \tfrac{1}{2}\,(a - x) \sqrt{(2\,ax - x^2)} + C.$

Denn

Denn man setze $x = a - y$; also $y = a - x$;
$dy = -dx$; $2ax = 2a^2 - 2ay$

$$\frac{x^2 = a^2 - 2ay + y^2;}{2ax - x^2 = a^2 - y^2;}$$ also folglich

$$\int -dx\,(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \int dy\,(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,a^2 \text{ arc. sin. } \frac{y}{a} + \tfrac{1}{2}\,y \sqrt{(a^2 - y^2)}$$ (Lehrs.)

Substituirt man wieder statt y dessen Werth, so wird

$$\int -dx\,(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,a^2 \text{ arc. sin. } \frac{a-x}{a}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,(a-x) \sqrt{(2ax - x^2)} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\,a^2 \text{ arc. sin. } \left(1 - \frac{2x}{2a}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,(a-x) \sqrt{(2ax - x^2)} + C$$

$$= \tfrac{1}{8}\,4\,a^2 \text{ arc. sin. } \left(1 - \frac{2x}{2a}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{8}\,(4a - 4x) \sqrt{(2ax - x^2)} + C$$

III. Zusatz: Wenn man in der letzten Gleichung $2a = c$ setzt, so wird

$$\int -dx\,(cx - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{8}\,c^2 \text{ arc. sin. } \left(1 - \frac{2x}{c}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{8}\,(2c - 4x) \sqrt{(cx - x^2)} + C;$$ folglich

IV. Zusatz: $\int -bx^{0}\,dx\,(cx - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= \int -bx^{\frac{1}{2}}\,dx\,(c - x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int -bxdx\,(cx^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{8}\,bc^2 \text{ arc. sin. } \left(1 - \frac{2x}{c}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{8}\,b\,(2c - 4x) \sqrt{(cx - x^2)} + C$$

§. 251.

§. 251.

Lehrsatz:

$$\int -dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,a^2\,\text{arc. cos.}\,\frac{x}{a} - \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{(a^2-x^2)} + C$$

Beweis:

1. $-dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$

2. Ferner $-\tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= -\frac{\tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{\tfrac{1}{2}\,dx(a^2-x^2)}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\tfrac{1}{2}\,a^2dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\,x^2\,dx\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

3. Setzet man diese Werthe statt des letzten Gliedes Nro. 1. so wird

4. $\int -dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \int[-\tfrac{1}{2}\,dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\,x^2\,dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}] + \int -\tfrac{1}{2}\,a^2\,dx\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

5. Nun ist $\int -\tfrac{1}{2}\,a^2\,dx\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,a^2\,\text{arc. cos.}\,\frac{x}{a}$ (§. 243. IV. Zus.)

6.

6. Ferner ist:

$$d\left(-\tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}\right) = -\tfrac{1}{2}dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\tfrac{1}{2}x^2dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$; also auch umgekehrt

7. $$\int\left[-\tfrac{1}{2}dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}x^2dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$
$$= -\tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)};$$

8. Setzt man die N. 5. und 7. gefundenen Werthe in die Gleichung N. 4.; so ist

9. $$\int -dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. cos. } \frac{x}{a}$$
$$-\tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}+C.$$

I. Zusatz: $$\int -bx^0dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}a^2b.\text{arc.cos.}\frac{x}{a}$$
$$-\tfrac{1}{2}bx\sqrt{(a^2-x^2)}+C$$

II. Zusatz: $$\int dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}a^2\text{arc.cos.}\left(1-\frac{2x}{2a}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax-x^2)}+C$$

Denn man setze $x = a - y$; also $y = a - x$; $dx = -dy$;

$$2ax = 2a^2 - 2ay$$
$$x^2 = a^2 - 2ay + y^2$$, mithin

$$2ax - x^2 = a^2 - y^2$$; folglich

$$\int dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} = \int -dy(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. cos. } \frac{y}{a} - \tfrac{1}{2}y\sqrt{(a^2-y^2)}$$ (Lehrsatz.)

End-

Substituirt man für y dessen Werth a — x, so ist

$$\int dx\,(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,a^2 \text{ arc. cos. } \frac{a - x}{a}$$

$$- \tfrac{1}{2}\,(a - x)\,\sqrt{(2ax - x^2)} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\,a.^2 \text{ arc. cos. } (1 - \frac{2x}{2a}) - \tfrac{1}{2}\,(a - x)\,\sqrt{(2ax - x^2)} + C.$$

$$= \tfrac{1}{8}\,4a^2 \text{ arc. cos. } (1 - \frac{2x}{2a})$$

$$- \tfrac{1}{8}\,(4a - 4x)\,\sqrt{(2ax - x^2)} + C$$

III. Zusatz: Wenn man in der letzten Gleichung $2a = c$ setzt, so wird:

$$\int dx\,(cx - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{8}\,c^2 \text{ arc.cos. } (1 - \frac{2x}{c})$$

$$- \tfrac{1}{8}\,(2c - 4x)\,\sqrt{(cx - x^2)} + C;$$

folglich

IV. Zusatz:

$$\int bx^0\,dx\,(cx - x^2)^{\frac{1}{2}} = \int bx^{\frac{1}{2}}\,dx\,(c - x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int bx\,dx\,(cx^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{8}\,bc^2 \text{ arc.cos. } (1 - \frac{2x}{c})$$

$$- \tfrac{1}{8}\,b\,(2c - 4x)\,\sqrt{(cx - x^2)} + C$$

§. 252.

Zur leichtern Anwendung der bisher angeführten Differential- und Integralformeln stellt erstere die am Ende beygefügte Vte Tabelle, und die VIte Tabelle daselbst letztere zusammen dar.

III.

III. Abschnitt.

Von den Verhältnissen krummer Linien überhaupt.

§. 253.

Erklärungen: (Fig. 84.)

a) Eine gerade Linie TQ, welche mit dem Bogen einer krummen Linie ab einen Punct M so gemein hat, daß die beyden Theile Ma, Mb derselben auf einer Seite dieser geraden Linie liegen, heißt eine **Tangens** der krummen Linie.

b) Zieht man die Sehnen aM, bM, so ist der Bogen AB nach jener Seite zu **hohl** (concavus), nach welcher die beyden Sehnen einen hohlen Winkel einschliessen, und der andern Seite zu, so wie der Winkel **erhaben** (arcus convexus).

I. Zusatz: Wenn man die Sehne ab zieht, so kehrt der Bogen aMB seine hohle Seite dieser Sehne, und seine erhabene der Tangens TQ zu.

II. Zusatz: Schneidet die Tangens irgendwo die krumme Linie, oder wendet letztere ihre hohle Seite der Tangens zu, so giebt es einen **Wendungspunct** (punctum flexus contrarii), wo der Bogen nach jener Gegend zu hohl wird, nach welcher er vorher erhaben war.

III. Zusatz: Wenn man durch M auf die Tangens TQ einen Perpendikel MN nach der hohlen Seite des Bogens zu errichtet, und aus den beliebigen Puncten N, C desselben mit NM, CM Kreise beschreibt, so gehen sie beyde durch den Punct M der krummen Linie, TQ ist ihre gemeinschaftliche Tangens, sie sind also Berührungskreise, von welchen der Kreis mit dem kleinern Halbmesser NM bey M eine größere Krümmung hat, als der Bogen des Kreises vom größern Halbmesser CM (§. 111. Lehrs. nebst III. und IV. Zus. Geom.)

IV. Zusatz: Da unendlich viele solche Berührungskreise auf der hohlen Seite der gegebenen krummen Linie AB möglich sind, und da jeder davon bey M eine andere Krümmung hat, so giebt es unter diesen Kreisen einen, welcher bey M mit der gegebenen krummen Linie die nemliche Krümmung hat, das ist ein unendlich kleiner Theil der krummen Linie fällt mit einem unendlich kleinen Bogen des Berührungskreises bey M zusammen.

§. 254.

Erklärungen: (Fig. 85.)

a) Wenn der aus C mit CM beschriebene Kreis bey M mit der krummen Linie AB einerley Krümmung hat, so heißt solcher der **Krümmungskreis** (circulus curvaturae, circulus osculator) für den Punct M der krummen Linie, und

b)

b) dessen Halbmesser CM der Krümmungshalbmesser (radius curvaturae, radius osculi) der krummen Linie AB am Puncte M.

I. Zusatz: Da von der krummen Linie AB, wenn sie nicht selbst eine Kreislinie ist, nicht alle Puncte in die Peripherie eines Kreises fallen können, so gehören zu verschiedenen Stellen der krummen Linie verschiedene Krümmungskreise. Je weiter daher der Punct m von M entfernt ist, desto weiter entfernt sich solcher von der Peripherie des Krümmungskreises für den Punct M, und je näher in der krummen Linie der Punct m dem Puncte M angenommen wird, desto näher liegt er dem Umfange des Krümmungskreises für den Punct M, nur wenn der Punct m dem Puncte M unendlich nahe liegt, so fällt der unendlich kleine Bogen Mm der krummen Linie mit einem unendlich kleinen Theil der Peripherie des Krümmungskreises zusammen, und die beyden unendlich kleinen Bögen sind weder der Lage noch Größe nach verschieden, ihre gemeinschaftliche Gränze ist o; nur an dieser Gränze, wenn man sich die beyden Bögen vorstellt, sind sie einander vollkommen gleich, ausser derselben sind sie verschieden, aber ihr Unterschied ist eine unendlich kleine Größe (§. 295. Arithm.)

II. Zusatz: Wenn man vom Mittelpunct C des Krümmungskreises nach dem Punct m der krummen

men

men Linie, die gerade Cm zieht, so ist Cm — CM eine unendlich kleine Größe, man kann daher in einer gegebenen Gleichung statt Cm die Linie CM, und umgekehrt setzen, ohne daß dadurch die Gleichung falsch wird (§. 299. Arithm.)

III. Zusatz: Da jeder unendlich kleine Theil einer krummen Linie dem unendlich kleinen Bogen seines Krümmungskreises gleich ist, so gelten für jede krumme Linie alle Zusätze des 233. §.

IV. Zusatz: Der Krümmungshalbmesser für den Punct M der krummen Linie AB steht durch eben diesen Punct auf der Tangens, folglich auch auf dem Bogen senkrecht; wenn man daher für einen gegebenen Punct M der krummen Linie die Tangens TQ, und durch M nach der hohlen Seite zu auf diese Tanges einen Perpendikel MN zieht, so liegt er in der Richtung des Krümmungshalbmessers.

§ 255.

Erklärungen:

a) Wenn man in einer krummen Linie lauter parallele Sehnen zieht, so heißt eine gerade Linie, welche alle diese Sehnen zugleich halbiert, der Durchmesser oder Diameter dieser krummen Linie;

b) Steht dieser Diameter auf allen obigen Sehnen zugleich senkrecht, so nennt man ihn die Axe der krummen Linie, und

c) die Puncte, in welchen die krumme Linie von der Axe durchschnitten wird, die Scheitelpuncte dieser krummen Linie.

d) Die Theile der krummen Linie auf beyden Seiten der Scheitel heissen die Schenkel oder Aeste der krummen Linie.

§. 256.

Erklärungen: (Fig. 85.)

a) Wenn man für den Punct M der krummen Linie AB auf die Abscissenlinie AO, die rechtwinklichte Ordinate MP zieht, und A zum Anfangspunct der Abscissen-Linie nimmt, so heißt

α) Jener Theil der Tangens TQ, welcher zwischen M und dem Puncte T liegt, wo sie mit der Abscissen Linie zusammenstoßt, das ist, MT die **Tangens**, und

β) der zwischen T und P liegende Theil der Abscissenlinie, oder TP die **Subtangens** des Punctes M, oder Abscisse AP.

b) Wird nun ferner durch M auf die Tangens ein Perpendikel nach der hohlen Seite der krummen Linie zu errichtet, so heißt

α) dieser Perpendikel, wenn man ihn bis zur Abscissenlinie verlängert, das ist, MN die **Normal**, und

β)

β) der von der Normal und Ordinate abgeschnittene Theil PN der Abscissenlinie, die Subnormal vom Puncte M oder Abscisse AP.

I. Zusatz: Die Normal liegt allemal in der Richtung des Krümmungshalbmessers. (§. 254. IV. Zus.)

II. Zusatz: Die rechtwinklichten Dreyecke TMN, TPM, MPN sind einander ähnlich (§. 96. Geom.)

III. Zusatz: Zieht man pm′ zur rechtwinklichten Ordinate PM parallel, bis sie mit der verlängerten Tangens in m′ zusammenstoßt; ferner Mn zu AO ebenfalls parallel, so ist △Mnm′ dem △MPN sowohl, als den Dreyecken TPM, und TMN ähnlich; denn $\alpha + \beta = 90^\circ = \beta + \gamma$, mithin $\alpha = \gamma$; $P = n = 90^\circ$; also △Mnm′ ∞ △MPN; also auch den beyden andern (II. Zus.); folglich ist auch

IV. Zusatz: das krummlinigte Dreyeck Mnm, dessen eine Seite der kleine Bogen Mm ist, den Dreyecken MPN, TPM, TMN ähnlich (§. 254. III. Zus. und §. 233. VIII. Zus.)

§. 257.

Lehrsätze: (Fig. 85.)

In jeder krummen Linie ist bey rechtwinklichten Coordinaten für jeden Punct M

I. Die Subtangens $= \frac{y\,dx}{dy}$

II. Die Tangens $= \sqrt{(y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2})} = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$

Beweis:

1) $\triangle Mnm \backsim \triangle TPM$ (§. 256. IV. Zus.), mithin

2) $TP : PM = Mn : mn$, oder (§. 233. IV. und V. Zus.) $TP : y = dx : dy$, also

3. die Subtangens $TP = \frac{ydx}{dy}$ Nro. I.

4. Ferner ist $TM^2 = TP^2 + PM^2$; oder

$$= \frac{y^2 \, dx^2}{dy^2} + y^2 \text{ (N. 3.)}: \text{ also}$$

Nro. II.!

5. Die Tangens $TM = \sqrt{(y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2})}$

$$= \sqrt{(\frac{y^2 dy^2 + y^2 dx^2}{dy^2})} = \frac{y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dy}$$

I. Zusatz: Beyde Gleichungen sind unvollständige Gleichungen (§. 233. VIII. Zus.)

II. Zusatz: $AT = TP - AP =$ Subtang. $- x$

$$= \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$$

III. Zusatz: Errichtet man durch A auf die Abscissenlinie den Perpendikel AI bis an die Tangens, so ist:

$$TP : PM = AT : AI. \text{ oder } \frac{ydx}{dy} : y = \frac{ydx - xdy}{dy} : AI;$$

$$\text{also } AI = \frac{ydx - xdy}{dx} = y - \frac{xdy}{dx}$$

§. 258.

Lehrsätze: (Fig. 85.)

In jeder krummen Linie ist bey rechtwinklichten Coordinaten für jeden Punct M

I. die Subnormal $= \frac{ydy}{dx}$

II. Die Normal $= \sqrt{(y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2})}$

$= \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$

Beweis:

1. $\triangle Mnm \backsim \triangle MPN$, also
2. $PN : PM = nm : Mn$; oder
   $PN : y = dy : dx$; also
3. die Subnormal $PN = \frac{ydy}{dx}$ Nro. I.
4. Ferner $MN^2 = PM^2 + PN^2 = y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2}$ (Nro. 3.); also
5. Die Normal $MN = \sqrt{(y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2})}$
   $= \sqrt{(\frac{y^2 dx^2 + y^2 dy^2}{dx^2})} = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$
   Nro. II.

Zusatz: Beyde Gleichungen sind wieder unvollständige Gleichungen.

§. 259.

Aufgabe:

Wenn von einer krummen Linie ihre Gleichung für rechtwinklichte Coordinaten gegeben ist, die Subtangente für jeden Punct M zu finden.

Auflösung:

Man bestimme aus der gegebenen Gleichung nach den Regeln der Differentialrechnung den Werth von $\frac{ydx}{dy}$ (§. 257. N. I.), so erhält man die gesuchte Größe der Subtangente für die gegebene krumme Linie. Denn da man dadurch alle Hilfsgrößen entfernt, so ist letztere eine vollständige Gleichung (§ 301. Arith.)

I. Zusatz: Auf ähnliche Art läßt sich durch vollständige Gleichungen der Werth der Tangens, Subnormal, und Normal einer krummen Linie aus ihrer Gleichung bestimmen.

II. Zusatz: Wenn umgekehrt von den 4 Linien, nämlich der Subtangens, Tangens, Subnormal und Normal eine gegeben ist, so läßt sich vermittels der Integralrechnung die Gleichung der krummen Linie, also letztere selbst finden. Man nennet dieses Verfahren die verkehrte Methode mit Tangenten.

§. 260.

Aufgabe: (Fig. 82)

Die ~~Subnormale~~ TP für den beliebigen Punct M des Kreises aus seiner Gleichung $y^2 = ax - x^2$ anzugeben, wo a den Diameter anzeigt.

I.

I. Auflösung:

1. $y^2 = ax - x^2$, mithin
$2ydy = adx - 2xdx$, und
$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a - 2x}$; folglich

2. $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a - 2x} = \frac{2(ax - x^2)}{a - 2x}$

3. Nun ist allgemein $PT = \frac{ydx}{dy}$ (§. 257. N. I.) folglich für den Kreis

4. $TP = \frac{2y^2}{a - 2x} = \frac{2(ax - x^2)}{(a - 2x)}$

5. Da nun letztere Gleichung nur Hauptgrößen enthält, so giebt sie den vollständigen Werth der gesuchten Subtangens für den Punct M des Kreises.

II. Auflösung:

6. Man ziehe den Halbmesser CM, so ist $\triangle TPM \backsim \triangle MPC$; mithin

7. $TP : PM = PM : PC$; das ist
$TP : y = y : \frac{1}{2}a - x$
$= 2y : a - 2x$; folglich

8. $TP = \frac{2y^2}{a - 2x} = \frac{2(ax - x^2)}{a - 2x}$

Zusatz: Für $x > \frac{1}{2}a$, also $2x > a$, wird $a - 2x$; folglich der Werth von TP negativ, das heißt, die Subtangente hat nun eine Lage, welche der

vor-

vorigen entgegengesetzt ist: sie fällt nicht mehr auf die Seite von A, sondern nach der Seite O zu

§. 261.

Aufgabe: (Fig. 82.)

Aus der gegebenen Gleichung des Kreises, die Tangens von M, das ist TM zu suchen.

I. Auflösung:

1. $y^2 = ax - x^2$;

$2ydy = adx - 2xdx = (a - 2x)\,dx$; also

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a - 2x} = \frac{2\sqrt{(ax - x^2)}}{a - 2x} \text{ und}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4(ax - x^2)}{(a - 2x)^2} = \frac{4ax - 4x^2}{a^2 - 4ax + 4x^2}$$

mithin

2. $$\frac{y^2 dx^2}{dy^2} = \frac{(4ax - 4x^2)\,y^2}{a^2 - 4ax + x^2}\text{; folglich}$$

3. $$y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2} = y^2 + \frac{(4ax - 4x^2)\,y^2}{a^2 - 4ax + 4x^2}$$

$$= y^2\,\frac{a^2 - 4ax + 4x^2 + 4ax - 4x^2}{a^2 - 4ax + 4x^2}$$

$$= \frac{a^2 y^2}{a^2 - 4ax + 4x^2}\text{; mithin}$$

4. $$\sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2}\right)} = \frac{ay}{a - 2x};$$

5. Nun ist allgemein $TM = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2}\right)}$ (§. 257. N. II.); folglich

6.

6. ist im Kreise für den Punct M

$$TM = \frac{ay}{a-2x} = \frac{a\sqrt{(ax-x^2)}}{a-2x}$$

7. Diese Gleichung ist nun wieder eine vollständige.

II. Auflösung:

8. Zieht man den Halbmesser CM, so ist

9. $\triangle TMP \backsim \triangle MPC$, also

10. $TM : PM = CM : CP$, oder

$TM : y = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a - x = a : a - 2x$, folglich

11. $TM = \frac{ay}{a-2x}$

Zusatz: Wenn wieder $x > \frac{1}{2}a$, so wird die Tangens negativ, mithin liegt sie nicht von M gegen A, sondern O zu.

§. 262.

Aufgabe: (Fig. 82.)

Aus der gegebenen Gleichung des Kreises die Subnormal PC für einen beliebigen Punct M anzugeben.

I. Auflösung:

1. $y^2 = ax - x^2$, also

$2ydy = adx - 2xdx$, und

2. $\frac{ydy}{dx} = \frac{a-2x}{2} = \frac{1}{2}a - x$

3. Nun ist allgemein $PC = \frac{ydy}{dx}$ (§. 258. N. I.)

mithin

4

4. $PC = \frac{1}{2} a - x$; welches abermal eine vollständige Gleichung ist.

II. Auflösung.

Offenbar ist $PC = CA - AP = \frac{1}{2} a - x$.

Zusatz: Wenn $x > \frac{1}{2} a$, so wird im Kreise die Subnormal negativ, folglich fällt dann P zwischen C und O.

§. 263.

Aufgabe: (Fig. 82.)

Aus der gegebenen Gleichung des Kreises für den Punct M die Normal MC zu finden.

I. Auflösung.

1. $y^2 = ax - x^2$

$2ydy = adx - 2xdx = (a - 2x)\, dx$, also

2. $\frac{ydy}{dx} = \frac{a - 2x}{2}$; mithin

$\frac{y^2dy^2}{dx^2} = \frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{4}$; und

3. $y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2} = ax - x^2 + \frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{4}$

$= \frac{4ax - 4x^2 + a^2 - 4ax + 4x^2}{4} = \frac{a^2}{4}$; also

4. $\sqrt{(y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2})} = \frac{1}{2} a$

5. Nun ist $CM = \sqrt{(y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2})}$ (§. 258. N. II.) also für den Punct M des Kreises

6.

6. $CM = \frac{1}{2}a$, welches wieder eine vollständige Gleichung ist.

II. Auflösung.

Offenbar ist $CM = \frac{1}{2}a$.

§. 264.

Lehrsatz: (Fig: 85.)

In jeder krummen Linie ist bey rechtwinklichten Coordinaten für jeden Punct M

der Krümmungshalbmesser $= - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}$

Beweis:

1. Man ziehe durch den Mittelpunct C des Krümmungshalbmessers CM, zur Abscissenlinie AO die Parallele CG, und verlängere
2. die rechtwinklichten Ordinaten MP, mp, bis solche mit ihr in G und g zusammenstossen.
3. Nun setze man $GM = u$; $gm = u'$, so ist $gm - GM = mn$, oder das Differential von GM, das ist: $mn = du = dy$.
4. Bezeichnet man den Bogen AM der krummen Linie mit Z, so ist ebenfalls $Mm = dZ$.
5. Ferner ist $\triangle MGC \backsim \triangle MPN$, mithin
6. $\triangle MGC \backsim \triangle Mnm$ (§. 256. IV. Zus.) also
7. $Mn : Mm = GM : CM$, oder
$dx : dZ = u : CM$, folglich

8.

8. $CM = \frac{udZ}{dx}$; und

9. $d(CM) = \frac{dxdudZ + udxd^2Z - udZd^2x}{dx^2}$ (§. 308. Arithm.)

10. Setzt man nun $CM = Cm$ (§. 254. II. Zus.) also $Cm - CM = d(CM) = o$; so wird

11. $\frac{dxdudZ + udxd^2Z - udZd^2x}{dx^2} = o$

$udxd^2Z - udZd^2x = - dxdudZ = dxdydZ$ (N. 3.) mithin

12. $u = - \frac{dxdydZ}{dxd^2Z - dZ\,d^2x}$

13. Ferner ist $Mm^2 = Mn^2 + mn^2$ (§. 233. VII. Zus.) oder

$dZ^2 = dx^2 + dy^2$; also

$dZ^2 = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$; und

14. $dZ = \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2dxd^2x + 2dyd^2y)$

$= (dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}} \times (dxd^2x + dyd^2y)$

$= \frac{dxd^2x + dyd^2y}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$; mithin

15. $dxd^2Z - dZd^2x = \frac{dx(dxd^2x + dyd^2y)}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$

$- (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}\, d^2x$

= d

$$= \frac{dx(dxd^2x + dyd^2y) - (dx^2 + dy^2)d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{dx^2d^2x + dxdyd^2y - dx^2d^2x - dy^2d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{dxdyd^2y - dy^2\,d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$$

16. Eben so ist $dxdydZ = dxdy\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$; folglich (Nr. 12.)

17. $u = -dxdy\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \times \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dxdyd^2y - dy^2d^2x}$

$$= -\frac{dxdy\,(dx^2 + dy^2)}{dxdyd^2y - dy^2\,d^2x} = -\frac{dx\,(dx^2 + dy^2)}{dxd^2y - dyd^2x}$$

folglich wird N. 8

18. $CM = -\frac{dx\,(dx^2 + dy^2)}{dxd^2y - dyd^2x} \times \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx}$

$$= -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}$$

Diese Gleichung ist nun wegen N. 6 eine unvollständige Gleichung.

I. Zusatz: Nimmt man dx als eine beständige Größe, so wird $CM = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}$

II.

II. Zusatz: Wenn dx beständig ist, und n die Normal bezeichnet, so ist: $CM = -\frac{n^3 dx^2}{y^3 d^2y}$; Denn

$$\frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx} = n \text{ (§. 258. Nr. II.)}; \text{ also}$$

$$\frac{y^3(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3} = n^3; \text{ und}$$

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} = \frac{n^3 dx^2}{y^3 d^2 y}; \text{ folglich}$$

$$CM = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} \text{ (I. Zus.)} = -\frac{n^3 dx^2}{y^3 d^2y}.$$

III. Zusatz: Wenn die Gleichung einer krummen Linie für rechtwinklichte Coordinaten gegeben ist, so läßt sich wie §. 259. ihr Krümmungshalbmesser für jeden Punct angeben.

§. 265.

Erklärung:

Eine gerade Linie, welcher sich eine krumme ohne Ende nähert, ohne mit ihr zusammen zu stossen, heißt die Asymptote dieser krummen Linie (ασυμπτωτος, qui non incurrere potest)

I. Zusatz: Die Asymptote einer krummen Linie ist einer Tangens für einen unendlich entfernten Punct gleich; denn da sie von der krummen Linie nicht durchschnitten wird, so liegt die letztere ganz auf einer Seite der Asymptote, und da sich beyde im-

immer einander nähern ohne zusammen zu stossen, so kann man in unendlicher Entfernung ihren Berührungspunct annehmen (§. 253. a, und §. 256. a. α)

II. Zusatz: Wenn die Tangens TM (Fig. 85.) eine Asymptote der krummen Linie seyn soll, so muß M von A unendlich weit entfernt, also eine der Coordinaten x, y unendlich seyn.

III. Zusatz: Durch AT, AI ist die Lage jeder Tangens, folglich auch jene der Asymptote bestimmt.

IV. Zusatz: Bestimmt man aus der gegebenen Gleichung einer krummen Linie für rechtwinklichte Coordinaten AT und AI (§. 257. II. und III. Zus.) und setzt in solchen entweder $x = \infty$, oder $y = \infty$ (II. Zus.), so läßt sich allemal angeben, ob eine Asymptote möglich sey, und in welcher Lage. (III. Zus.)

§. 266.

Erklärungen:

a) Die wahre Länge einer krummen Linie angeben, das ist, ihr Verhältniß zum gewöhnlichen Längenmaaße bestimmen, heißt die **krumme Linie rectificiren.**

b) Den Flächeninhalt einer Fläche im gewöhnlichen Flächenmaaße angeben, heißt die **Fläche quadriren.**

c)

c) Den körperlichen Inhalt finden, heißt den Körper cubiren.

Zusatz: Eine Linie wird also rectificirt, wenn man ihre Länge in Schuhen, Zollen u. s. f. anzugeben weis, und die Fläche quadrirt, wenn ihr Inhalt in Quadratschuhen, Quadratzollen u. s. w. bestimmt ist; Wenn man die Anzahl der Cubikfuß, Cubikzolle, die ein Körper hält, bestimmt, so wird er cubirt.

§. 267.

Lehrsatz: (Fig. 85.)

Wenn Z die Länge der krummen Linie AM im gewöhnlichen Fußmaaße bezeichnet, so ist für rechtwinklichte Coordinaten:

$$Z = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis:

1. Man ziehe für den Punct M die rechtwinklichten Coordinaten AP, PM, das ist, x, y; und
2. die Hilfscoordinaten Ap, pm oder x′, y′, und durch M zur Abscissenlinie die Parallele Mn, so ist
3. Mn = Pp = dx; mn = dy; und Mm = dZ.
4. Vom krummlinigten Dreyecke Mnm läßt sich Mm = dZ als ein Bogen des Krümmungskreises (§. 254.) folglich
5. als ein unendlich kleiner Theil der Tangens nehmen (§. 233. VII. und VIII. Zus.) mithin

6.

6. $Mm^2 = Mn^2 + mn^2$, oder $dZ^2 = dx^2 + by^2$ also

$dZ = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$

7. Letztere Gleichung giebt das Differential der gesuchten Größe, aber da die Größen der Construction wegen in einiger Entfernung von ihrer Gränze betrachtet werden, so ist eben dieselbe eine unvollständige Gleichung.

8. Integrirt man also letztere Gleichung, das ist, nimmt man: $Z = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ so erhält man eine Gleichung, welche, so bald aus ihr nach den gewöhnlichen Reductionsgesetzen alle Hilfsgrößen weggeschafft sind, den vollständigen Werth von Z angiebt (§. 301. Arithm.)

Zusatz. Wenn man aus der gegebenen Gleichung für rechtwinklichte Coordinaten einer krummen Linie durch Differentiiren den Werth von $(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ bestimmt, und solchen integriret, so wird dadurch die krumme Linie rectificirt.

§. 268.

Lehrsatz: (Fig. 85.)

Wenn R den Flächeninhalt der zwischen der krummen Linie AM = Z, und den rechtwinklichten Coordinaten AP = x; P = y enthaltenen Fläche AMP anzeigt, so ist: $R = \int ydx$.

Beweis:

1. Da Mm ein unendlich kleiner Bogen des Krümmungskreises (§. 254.) also

2.

2. das unendlich kleine Trapez PM mp = dR ein Kreistrapez ist, so läßt sich statt des Bogens Mm ihre Sehne, oder statt des krummlinigten Trapezes

3. dafür das geradlinigte PMmp setzen, (§. 233, IX. Zus.)

4. Nun ist PMmp = $\frac{1}{2}$ (PM + pm) Pp (§. 152. Geom.) oder
dR = $\frac{1}{2}$ (y + y + dy) dx = ydx + $\frac{1}{2}$ dydx = ydx (§. 302. I. Zus. Arithm.)

5. Letztere unvollständige Gleichung enthält also das Differential der ganzen Fläche AMP, folglich giebt ihr Integral die Fläche selbst, das ist

6. R = $\int$ ydx.

I. Zusatz: Wenn (Fig. 80.) für schiefwinklichte Coordinaten α ihren eingeschlossenen Winkel APM bezeichnet, so ist: R = $\int$ sin. α y d x. Denn PM mp = (PM + pm) po, und po : Pp = sin. APM : 1, mithin po = sin. APM. Pp, mithin PM mp = $\frac{1}{2}$ (y + y + dy) sin. α dx = y sin. α dx, folglich R = $\int$ sin. α y d x.

II. Zusatz: Wenn man aus der gegebenen Gleichung für rechtwinklichte Coordinaten einer krummen Linie den Werth von ydx oder für schiefwinklichte jenen von sin. α y d x sucht, und solchen integriret, so bekömmt man eine vollständige Gleichung für den Flächeninhalt, weil dadurch alle Hilfsgrößen entfernet werden.

§. 269.

§. 269.

Erklärungen: (Fig. 85.)

a) Wenn sich die zwischen den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM und der krummen Linie AM eingeschlossene Ebene AMP um die Abscissen Linie AO dreht, so heißt der dadurch erzeugte Körper ein Sphäroid, und

b) die vom Bogen AM beschriebene krumme Fläche die Oberfläche dieses Sphäroids, so wie

c) der von der Ordinate PM beschriebene Kreis die Grundfläche eben dieses Sphäroids.

§. 270.

Lehrsätze: (Fig. 85.)

Wenn π die Peripherie des Kreises für den Durchmesser 1, K den körperlichen Inhalt, und Q die Oberfläche eines Sphäroids bezeichnen, so ist

I. $K = \int \pi y^2 dx$; und

II. $Q = \int 2 \pi y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$

Beweis:

1. Man ziehe die Hilfscoordinaten Ap, pm, so ist Mm ein unendlich kleiner Theil des Krümmungskreises, mithin $Mm = dZ = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 267.)

2. Das krummlinigte Kreistrapez PMmp kömmt dem geradlinigten PMmp unendlich nahe, folglich

lich kann man letzteres an die Stelle des erstern setzen (§. 233. IX. Zus.)

3. Durch das Umdrehen des Kreistrapezes wird also ein abgekürzter Kegel, so wie durch den Bogen Mm die krumme Seitenfläche desselben beschrieben.

4. Nun ist dieser abgekürzte Kegel das körperliche Element, oder das Differential des Sphäroids, oder $= dK$, und

5. die krumme Seitenfläche dieses Kegels das Element oder das Differential der Oberfläche dieses Sphäroids oder $= dQ$;

6. Es ist also

$dK = \frac{1}{3} Pp. \pi (pm^2 + PM^2 + pm. PM)$ (§. 269. Geom.) oder

$= \frac{1}{3} \pi dx ((y + dy)^2 + y^2 + (y + dy) y)$

$= \frac{1}{3} \pi dx (y^2 + 2 ydy + dy^2 + y^2 + y^2 + ydy)$

$= \frac{1}{3} \pi dx (3 y^2 + 3 ydy + dy^2)$

7. Nun ist $3 y^2$ von $3 y^2 + 3 ydy + dy^2$ unendlich wenig unterschieden (§. 296. Zus. Arith.) folglich wird

8. $dK = \frac{1}{3} \pi dx. 3 y^2 = \pi y^2 dx$ eine unvollständige Gleichung (§. 299. Arithm.), und

9. $K = \int \pi y^2 dx$. Nr. I.

10, Eben so ist aus Nr. 5.

$dQ = Mm. \pi (PM + pm)$ (§. 270. Geom.) oder

$= \pi dZ (y + y + dy) = \pi dZ (2 y + dy)$

11.

11. Ferner ist 2y von 2y + dy unendlich wenig unterschieden, folglich

12. $dQ = \pi . dZ . 2y$ eine unvollständige Gleichung, und eben so

$= \pi . 2y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ (Nr. 1.); also

13. $Q = \int 2 \pi y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ Nr. II.

I. Zusatz: Wenn von einer krummen Linie ihre Gleichung für rechtwinklichte Coordinaten gegeben ist, so findet man den körperlichen Inhalt des durch sie erzeugten Sphäroids, wenn man durch Differentiirung der Gleichung den Werth von $\pi y^2 dx$ bestimmt, und solchen integrirt, wo dann durch Entfernung aller Hilfsgrößen letztere Gleichung vollständig wird.

II. Zusatz: Bestimmt man aus der Gleichung der krummen Linie den Werth von $2\pi y(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, und integrirt solchen, so erhält man den Inhalt von der Oberfläche dieses Sphäroids in einer vollständigen Gleichung, weil dadurch alle Hilfsgrößen entfernet werden.

II. Hauptstück.

Von Kegelschnitten.

I. Abschnitt.

Von Kegelschnitten überhaupt.

§. 271.

Erklärung.

Wenn man einen Kegel mit einer Ebene durchschneidet, so heißt jener Theil dieser Ebene, der innerhalb des Kegels fällt, ein Kegelschnitt (Sectio conica).

I. Zusatz: Wenn man (Fig. 86.) durch die Axe DC eines gleichseitigen Kegels eine Ebene legt, so giebt der Kegelschnitt das gleichschenklichte Dreyeck EDH, welches, da in seiner Ebene die Axe des Kegels liegt, der Axentriangel heißt.

II. Zusatz. Der Axentriangel steht auf der Grundfläche des Kegels senkrecht; denn DC steht auf solcher senkrecht (§. 232. II. Zus. Geom.), also auch der Axentriangel (§. 170. Geom.)

III. Zusatz: Die Durchschnittslinie EH des Axentriangels und der Grundfläche des Kegels ist ein

Dia=

Diameter; denn in ihr liegt der Mittelpunct der Grundfläche des Kegels.

IV. Zusatz: Wenn man den gleichseitigen Kegel in einem beliebigen Punct N mit einer Ebene durchschneidet, welche zur Grundfläche parallel ist, so giebt der Kegelschnitt einen Kreis (§. 249. I. Zus. Geom.), auf welchen die Axe DC senkrecht steht (§. 173. Geom.), und durch dessen Mittelpunct c geht. Denn DC : DC = cN : CH = cR : CE (§. 92. Geom.) nun ist CH = CE, also auch cN = cR, folglich ist c der Mittelpunct.

V. Zusatz: Letzterer Kreis steht auf dem Axentriangel senkrecht, und ihre Durchschnittslinie NR ist der Diameter dieses Kreises.

VI. Zusatz: RN ist zu EH parallel (§. 172. II. Zus. Geom.)

VII. Zusatz: Wenn man durch einen beliebigen Punct A des einen Schenkels DH zum andern Schenkel DE, mit HE, oder RN eine Parallellinie AG zieht, so ist der Triangel ADG ebenfalls gleichschenklicht.

§. 272.

Erklärungen:

a) Wenn man (Fig. 86.) in der Ebene vom Scheiteltriangel EDH eines gleichseitigen Kegels durch einen beliebigen Punct A des Schenkels DH eine gerade Linie AB so zieht, daß BAH = EDH also AB ∦ DE ist, und man legt durch AB eine Ebene, welche auf jener des Axentriangels senkrecht steht, so heißt die krumme Durchschnittslinie KMAmI

die-

dieser Ebene mit der Oberfläche des Kegels eine Parabel.

b) Zieht man hingegen (Fig. 87.) AB so, daß BAH > EDH ist, so heißt die krumme Durchschnittslinie AMBA der durch AB gelegten und auf dem Axentriangel senkrechten Ebene, mit der Oberfläche des Kegels, eine Ellipse.

c) Wenn endlich (Fig. 88.) der Winkel bAH < EDH, so heißt dieser Durchschnitt eine Hyperbel.

I. Zusatz: Da bey der Parabel (Fig. 86.) die Linie AB zur Seite DE parallel ist, und mit der andern Seite DH den Punct A gemein hat, so kann AB mit diesen beyden Seiten nirgends in einem andern Puncte mehr zusammenstoßen, man mag sie auch wie immer verlängern; mithin ist AB eine der Größe nach unbestimmte Linie.

II. Zusatz: In der Ellipse schneidet die unter dem Winkel BAH > EDH (Fig. 87) gezogene gerade Linie AB die beyden Seiten des Axentriangels oder Kegels; denn mit DH stoßt sie in A zusammen, da nun BAD + ADB < 180°, so stoßt sie auch mit ED in B zusammen (§. 44. Geom.); folglich ist bey der Ellipse AB eine der Größe und Lage nach bestimmte Größe, die man gewöhnlich mit a bezeichnet.

III. Zusatz: Bey der Hyperbel (Fig. 88.) schneidet die unter dem Winkel bAH > EDH gezogene gerade Linie die eine Seite DH in A; und da BAD

+

$+$ ADB $< 180^\circ$, so trifft eben diese Linie verlängert mit der ebenfalls verlängerten Seite ED in B zusammen, mithin ist wieder AB eine der Größe und Lage nach bestimmte Linie, die man ebenfalls gewöhnlich mit a bezeichnet.

IV. Zusatz: Stellt man sich (Fig. 88.) die Seiten des Axentriangels EDH durch die Spitze D verlängert, folglich noch einen umgekehrten Kegel hDc vor, so schneidet die durch Ab gelegte Ebene den obern umgekehrten Kegel ebenfalls, und die Durchschnittslinie iBk der Ebene mit der Oberfläche dieses umgekehrten Kegels ist eine Hyperbel.

V. Zusatz: Außer diesen 3 eben angeführten, und dem Axentriangel, giebt es im gleichseitigen Kegel keinen andern Kegelschnitt; denn der Kreis ist nur eine besondere Art der Ellipse.

VI. Zusatz: Der Axentriangel gehört, so wie auch größtentheils der Kreis in das Gebieth der Elementargeometrie, einige schwerere Sätze des letztern ausgenommen.

§. 273.

Erklärungen.

a) In den Gleichungen für die Kegelschnitte heißt die beständige Größe, welche in Verbindung mit x und y die Natur einer jeden ausdrückt, der **Parameter**, (von παραμετρέω, da er in Verbindung mit der Absciſſe das Quadrat der Ordinate mißt); der Parameter für rechtwinklichte Coordinaten

naten auf der Axe wird in der Folge immer mit p bezeichnet.

b) Jener Punct der Axe, wo die Ordinate dem halben Parameter gleich ist, heißt der Brennpunct (focus).

c) Eine gerade Linie vom Brennpuncte nach einem Puncte M obiger krummen Linien, heißt die Entfernung des Punctes M vom Brennpuncte (radius vector) Fahrstrich oder nach einigen der Träger.

d) Unter Coordinaten ohne Beysatz versteht man immer rechtwinklichte.

II. Abschnitt.

Von der Parabel.

§. 274.

Lehrsatz: (Fig. 86.)

Wenn man AB zur Abscissenlinie, und A zu ihrem Anfangspunct nimmt, die rechtwinklichten Coordinaten mit x, y, und den Parameter mit p bezeichnet, so ist für jeden Punct M der Parabel:

$$y^2 = px.$$

Beweis.

1. Man lege durch den beliebigen Punct M der Parabel eine Ebene zur Grundfläche parallel, so ist
2. der Kegelschnitt MRmN ein Kreis, welcher auf dem Axentriangel DEH senkrecht steht, und die

Durch

Durchschnittslinie RN ist der Diameter, und zu EH parallel (§. 271. IV. — VI. Zus.) folglich steht auch

3. die Durchschnittslinie MPm der Parabel mit dem Kreis auf dem Axentriangel (§. 171. Geom.), also auch auf den in der Ebene desselben gezogenen Linien AB, NR senkrecht (§. 162. Geom.); mithin sind

4. AP, MP rechtwinklichte Coordinaten für den Punct M der Parabel, und

5. im Kreise ist: $MP^2 = NP.PR$ (§. 101. Geom.)

6. Durch A ziehe man im Axentriangel zu NR die Parallele AG, so ist:

7. AG = PR (§. 45. IV. Zus. Geom.) und

8. GD = AD (§. 271. VII. Zus.)

9. Ferner ist $\triangle APN \backsim \triangle DGA$, also
$DG : AG = AP : PN$, mithin

10. $PN = \frac{AG}{DG}.AP = \frac{AG}{AD}.AP$ (Nr. 8.) also

11. $MP^2 = \frac{AG^2}{AD}.AP$ (Nr. 5, 7 und 10.).

12. Nun ist MP = y, AP = x, weil diese Gleichung für jeden andern Punct der Parabel ebenfalls gilt; hingegen ist $\frac{AG^2}{AD}$ eine unveränderliche Größe, oder der Parameter (§. 273.); setzt man solchen = p; so ist

13. $y^2 = px$.

I.

I. Zusatz: Im gleichschenklichten Dreyecke ADG ist

$AD : \frac{1}{2} AG = 1 : \sin. \frac{1}{2} D$ (§. 327. Trigon.) also

$AG = 2 AD \sin. \frac{1}{2} D$

$AG^2 = 4 AD^2 \sin. \frac{1}{2} D^2$ und

$\frac{AG^2}{AD} = p$ (Nr. 12.) $= 4 AD \sin. \frac{1}{2} D^2$, folglich

$AD = \frac{p}{4 \sin. \frac{1}{2} D^2}$ mithin

II. Zusatz. Wenn von einem gleichseitigen Kegel der Winkel D gegeben ist, und man nimmt

$AD = \frac{p}{4 \sin. \frac{1}{2} D^2}$, so erhält man allemal nach §. 272. 2. eine Parabel, in welcher $y^2 = px$ ist.

III. Zusatz: $\sin. \frac{1}{2} D^2 = \frac{p}{4 AD}$ (I. Zus.)

$\sin. \frac{1}{2} D^2 = \frac{1 - \cos. D}{2}$ (§. 308. IV. Trigon) also

$\frac{p}{2 AD} = 1 - \cos. D$, und

$\cos. D = 1 - \frac{p}{2 AD}$; mithin wenn von einem gleichseitigen Kegel die Entfernung DA des Schnittes gegeben, und man nimmt den Winkel D so, daß $\cos. D = 1 - \frac{p}{2 AD}$ ist, so erhält man wieder eine Parabel, wo $y^2 = px$ ist.

IV. Zusatz: Jede krumme Linie, wo $y^2 = px$, ist eine Parabel (παραβολη von παραβάλλω an-

lie-

anliegen, oder vergleichen) denn man kann entweder für den Kegel den Winkel D annehmen, und daraus AD bestimmen, oder man kann letztere beliebig setzen, und dafür D suchen, wenn nur allemal p eine unveränderliche Größe bezeichnet.

V. Zusatz: In der Parabel ist $y = \pm\sqrt{px}$, das heißt, auf beyden Seiten von AB giebt es Ordinaten, die einander gleich, aber entgegengesetzt sind, folglich ist AB die Axe der Parabel (§. 255.) und da für $x = 0$, auch $y = 0$ ist, so ist A der Scheitel derselben.

VI. Zusatz: für $x = \infty$, wird auch $y = \infty$, das heißt, die Parabel hat vom Scheitel auf jeder Seite 2 gleiche unendliche Schenkel oder Aeste (ramos).

VII. Zusatz: Setzt man x negativ, so ist $y = \pm\sqrt{-px}$ eine unmögliche Größe (§. 100. III. Zus. Arith.) mithin giebt es auf der über den Scheitel A hinaus verlängerten Axe keine Ordinaten.

VIII. Zusatz: Da $x : y : p$, so ist der Parameter der Axe die dritte geometrische Proportionalgröße zur Absciße und Ordinate, so wie die Ordinate die mittlere Proportionalgröße zwischen der Absciße und dem Parameter ist.

IX. Zusatz: Wenn x, X zwey verschiedene Abscißen auf der Axe, und y, Y ihre rechtwinklichten Ordinaten bezeichnen, so ist

$y^2 : Y^2 = px : pX = x : X$, also

$y : Y = \sqrt{x} : \sqrt{X}$.

§. 275.

§. 275.

Lehrsatz: (Fig. 89.)

Der Brennpunct F ist in der Parabel um den vierten Theil des Parameters vom Scheitel entfernt, oder

$$AF = \frac{1}{4} p$$

Beweis:

1. Man ziehe zu AF die entsprechende rechtwinklichte Ordinate FM', so ist
2. $FM' = \frac{1}{2} p$ (273. b) mithin $FM'^2 = \frac{1}{4} p^2$.
3. Ferner ist allgemein $y^2 = px$, also
4. $FM'^2 = p. AF$, folglich
5. $p AF = \frac{1}{4} p^2$, oder
   $AF = \frac{1}{4} p$.

Zusatz; Zieht man vom Brennpuncte F nach einem beliebigen Puncte M der Parabel eine gerade Linie, oder den Radius Vector FM, und die Coordinaten AP, PM, so ist $FM^2 = PM^2 + FP^2$
$= PM^2 + (AP - AF)^2$, das ist
$= y^2 + (x - \frac{1}{4} p)^2$ (Lehrs.) $= px + x^2 - \frac{1}{2} px$
$+ \frac{1}{16} p^2$
$= x^2 + \frac{1}{2} px + \frac{1}{16} p^2$, folglich
$FM = x + \frac{1}{4} p$, das ist: der Radius Vector ist der Summe von der Abscisse und dem vierten Theile des Parameters gleich.

§. 276.

Lehrsätze: (Fig. 89.)

In der Parabel ist für jeden beliebigen Punct M

I. die Subnormal $PN = \frac{1}{2} p$.

II. Die Subtangens $PT = 2x$.

Be-

Beweis:

1. Für jede krumme Linie ist:

die Subnormal PN $= \frac{ydy}{dx}$ (§. 258. I.) und

2. die Subtangens PT $= \frac{ydx}{dy}$ (§. 257. I.)

3. Nun behandle man die Gleichung der Parabel nach §. 259. Es ist nemlich $y^2 = px$ und $2ydy = pdx$, mithin

4. $\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}p =$ der Subnormal PN der Parabel.

5. Ferner $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, mithin

$\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x =$ der Subt. PT.

6. Da endlich aus den beyden Gleichungen alle Hilfsgrößen entfernt sind, so sind sie beyde vollständige Gleichungen.

I. Zusatz: Die Normal der Parabel oder MN ist $= \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}p^2)} = \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)}$;

Denn $\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}p$ (N. 4.) mithin

$\frac{y^2dy^2}{dx^2} = \frac{1}{4}p^2$, und

$y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2} = y^2 + \frac{1}{4}p^2$; also $\sqrt{(y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2})}$

$= \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}p^2)}$, das ist aus §. 358. II. die Normal MN $= \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}p^2)}$

$= \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)}$.

II. Zusatz: Die Tangens in der Parabel, oder
$TM = \sqrt{(4x^2 + px)} = \sqrt{(4x(x + \frac{1}{4}p))}$
$= \sqrt{(4x . FM)}$ Denn
$\frac{ydx}{dy} = 2x$ (Nr. 5.) also $\frac{y^2 dx^2}{dy^2} = 4x^2$, und
$y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2} = y^2 + 4x^2$; also $\sqrt{(y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2})}$
$= \sqrt{(px + 4x^2)}$, mithin aus §. 257. II.
Tangens $TM = \sqrt{(px + 4x^2)} = \sqrt{(4x(x + \frac{1}{4}p))} = \sqrt{(4x . FM)}$ (§. 275. Zus.)

III. Zusatz: Wenn für M die Coordinaten AP, PM gegeben sind, und man nimmt AT = AP, also PT = 2 x (Lehrs.) und zieht MT. so ist letztere die Tangens.

IV. Zusatz: Durch die Tangens ist die Lage der Normal gegeben und umgekehrt (§. 256. b).

V. Zusatz: Durch die Subnormal ist die Lage der Normal ebenfalls bestimmt: denn zwischen M und N giebt es nur eine Linie.

§. 277.

Lehrsatz: (Fig. 89.)

Wenn man in der Parabel für einen beliebigen Punct M die Tangens TMQ, die Normal MN, den Radius Vector FM, und durch M zur Axe AO die Parallele MR zieht, so ist

I. der Winkel RMQ = FMT, und
II. . . . . . RMN = NMF.

Be-

Beweis:

1. $TF = TP - FP = TP - AP + AF$
$= 2x - x + \frac{1}{4}p = x + \frac{1}{4}p = FM$ (§. 275. und 276.) mithin
2. $FTM = TMF$.
3. Ferner ist $PMN = PTM$, also auch $PMN = TMF$.
4. $PMN + NMR = NMR + RMQ = 90°$, also $PMN = RMQ$, und also aus Nr. 3.
5. $RMQ = FMT$. Nr. I.
6. $NMF + FMT = NMR + RMQ = 90°$. ferner $FMT = RMQ$, also
7. $RMN = NMF$. Nr. II.

Anmerkung. Dieser Satz enthält den Beweis, daß sich alle Lichtstrahlen, welche zur Axe parallel einfallen im Brennpuncte sammeln.

§. 278.

Lehrsatz: (Fig. 90.)

Wenn man MR, welche zur Axe AO parallel ist, zur Abscissenlinie, und M für ihren Anfangspunct nimmt, ferner zur Tangens TM die Ordinaten z. B. mr parallel zieht, endlich die Abscisse mit u, die Ordinate durch v und den entsprechenden Parameter mit q bezeichnet, so ist allgemein:

$v^2 = qu$.

Be-

Beweis:

1. Die dem Puncte M auf der Axe entsprechenden Coordinaten AP, PM drücke man wie gewöhnlich mit x, und y, so wie den Parameter der Axe mit p aus.

2. Da man nun M als Anfangspunct der Abscissenlinie MR setzt, so ist FM eine unveränderliche Größe, man setze also FM = c; so ist

3. $PM = y = \sqrt{px}$; und $TP = 2x$ (§. 276.) und

4. $rt = MT = \sqrt{4x.c}$ (§. 276. II. Zus.) also

5. $mt = rt - rm = \sqrt{4cx} - v$.

6. Man ziehe noch die rechtwinklichten Coordinaten Ao, om, so ist $\triangle MPT \backsim \triangle mot$, mithin

7. $TM : PM = mt : om$, das ist:

$\sqrt{4cx} : \sqrt{px} = \sqrt{4cx} - v : om$, folglich

8. $$om = \frac{\sqrt{px}\sqrt{4cx}}{\sqrt{4cx}} - \frac{v\sqrt{px}}{\sqrt{4cx}}$$

$$= \sqrt{px} - \frac{v\sqrt{px}}{\sqrt{4cx}}$$

9. Ferner ist $TM : TP = tm : to$, oder

$\sqrt{4cx} : 2x = \sqrt{4cx} - v : to$, also

10. $$to = \frac{2x\sqrt{4cx}}{\sqrt{4cx}} - \frac{2xv}{\sqrt{4cx}} = 2x - \frac{2xv}{\sqrt{4cx}}$$

11. Nun ist $Mr = u = Tt$. also

$$To = Tt + to = u + 2x - \frac{2xv}{\sqrt{4cx}}$$

12.

12. Ferner AT = 2 x — x (§. 257. II. Zus.) = x, also

13. $Ao = To - TA = u + 2x - \frac{2xv}{\sqrt{4cx}} - x$

$= u + x - \frac{2xv}{\sqrt{4cx}}$

14. Endlich $om^2 = p.\ Ao$; das ist:

$\left(\sqrt{px} - \frac{v\sqrt{px}}{\sqrt{4cx}}\right)^2 = p\left(u + x - \frac{2xv}{\sqrt{4cx}}\right)$ (Nr. 8. und 13.), oder

$px - \frac{2vpx}{\sqrt{4cx}} + \frac{v^2px}{4cx}$

$= pu + px - \frac{2vpx}{\sqrt{4cx}}$, also

$\frac{v^2px}{4cx} = pu$, folglich

15. $v^2 = \frac{4cpxu}{px} = 4cu$.

16. Da nun c, mithin auch 4c eine beständige Größe, also der Parameter oder q ist, so wird

17. $v^2 = qu$.

I. Zusatz: $v = \pm\sqrt{qu}$, folglich gehören zu jeder Abscisse Mr zwey gleiche einander entgegengesetzte Ordinaten rm, rn; mithin ist

II. Zusatz: die Abscissenlinie MR ein Diameter, und M der Scheitel desselben (vertex diametri) (§. 255.); der Parameter q dieses Diameters ist dem

vierfachen Abstande seines Scheitels M vom Brennpuncte F gleich.

III. Zusatz: Wenn man für einen andern Punct m die Tangens, und zur Axe durch m die Abscissenlinie parallel zieht, so halbirt sie ebenfalls alle zur Tangens parallel gezogenen Sehnen, mithin ist jede gerade Linie, welche mit der Axe parallel läuft, ein Diameter der Parabel.

IV. Zusatz: Für jeden Diameter ist der Parameter die dritte geometrische Proportional zur Abscisse und Ordinate, und die Ordinate die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen der Abscisse und dem Parameter; die Abscissen verhalten sich wie die Quadrate der Ordinaten, und die Ordinaten hingegen wie die Quadratwurzeln aus ihren entsprechenden Abscissen.

§. 279.

Erklärung: (Fig. 91.)

Wenn man die Axe, vom Scheitel aus, um $AG = AF = \frac{1}{2}p$ verlängert, und durch G auf sie die Perpendikularlinie DE errichtet, so heißt letztere die **Richtungslinie** der Parabel (linea directrix).

I. Zusatz: In der Parabel ist jeder von einem Punct M auf die Richtungslinie gezogene Perpendikel dem Radius Vector gleich, oder $Mm = MF$; denn man ziehe die Ordinate MP, so ist

$$Mm = PG = x + \frac{1}{2}p = MF \text{ §. 275. Zus.)}$$

II.

II. Zusatz: Wenn man durch G auf einer geraden Linie GO einen Perpendikel errichtet, in GO einen bestimmten Punct F nimmt, so ist eine krumme Linie, in welcher für jeden beliebigen Punct M allemal Mm = FM ist, eine Parabel. Denn GF ist nun vermög der Annahme eine beständige Größe, und eben so ist AG = AF = $\frac{1}{2}$ GF; man setze also GF = $\frac{1}{2}$ p, mithin AG = AF = $\frac{1}{4}$ p. Ferner ziehe man aus M auf GO den Perpendikel MP, so ist für die Abscissenlinie AO und ihren Anfangspunct A, die Linie FM = Mm (ex hyp.) = GP = GA + AP = $\frac{1}{4}$ p + x, und FP = AP — AF = x — $\frac{1}{4}$ p; ferner

$$PM^2 = FM^2 - PF^2 = (x + \tfrac{1}{4}p)^2 - (x - \tfrac{1}{4}p)^2,$$

also

$$y^2 = x^2 + \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{16}p^2 - x^2 + \tfrac{1}{2}px - \tfrac{1}{16}p^2$$

= px; folglich die krumme Linie eine Parabel (§. 274. IV. Zus.)

III. Zusatz: Wenn man noch die gerade Linie mF, und die Tangens TMQ zieht, so halbirt letztere den Winkel FMm sowohl, als die Linie mF, und steht auf letzterer senkrecht. Denn RMQ = mMT als Verticalwinkel; und RMQ = FMT (§. 277), also mMT = FMT; da ferner FM = mM (I. Zus.) mithin FMm ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, so halbirt auch TM die Seite mF, und steht auf ihr senkrecht (§. 39. I. Zus. Geom.).

IV. Zusatz: Wenn man also durch eine gerade Linie TM entweder den Winkel FMm, oder die Seite

mF halbiret, so ist TM die Tangens für den Punct M der Parabel. Man vergleiche §. 276. III. Zus.

§. 280.

Aufgabe: (Fig. 91.)

Für einen gegebenen, oder willkürlich angenommenen Parameter p eine Parabel zu verzeichnen.

I. Auflösung:

1. Man ziehe die Abscissenlinie AO, und theile sie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und errichte auf ihr durch alle diese Theilungspuncte 1, 2, 3... Perpendikel.
2. Nun suche man zwischen jeder Abscisse A1, A2, A3, u. s. f. und dem Parameter die mittlere geometrische Proportional (§. 102. Geom.) und trage solche
3. allemal zu beyden Seiten des entsprechenden Perpendikels auf; so liegen
4. alle diese Endespuncte in der Parabel (§. 274. VIII. Zus.
5. Zieht man daher eine krumme Linie durch dieselben, so kömmt sie der Parabel um so näher, je mehr Puncte man bestimmt, folglich in je kleinere Theile man die Abscissenlinie getheilt hat.

II. Auflösung:

6. Man nehme auf der Axe AG = AF = $\frac{1}{4}$ p, und errichte durch G den Perpendikel DE.

7. An GE lege man ein Lineal, und an selbes einen Winkelhacken BIH so, daß ein Schenkel BI längst GE, und der andere IH auf GO fällt.
8. Nun befestige man eine Schnurr = IH mit dem einen Ende im Puncte F der Axe, mit dem andern in H des Winkelhackens.
9. Mit einem Bleystifte spanne man diese Schnur auf der Axe oder längst dem Winkelhacken, so fällt solcher auf A; denn in dieser Lage ist AF + AH = IH (Nr. 8.)
10. Rückt man endlich den Winkelhacken längst dem Lineal von G gegen E zu, hält mit dem Bleystifte am Winkelhacken die Schnur immer gespannt, so beschreibt solcher einen Schenkel der Parabel; denn
11. Für jeden Punct M′ der beschriebenen Linie ist immer FM′ + M′H = IH (Nr. 4.) = IM′ + M′H, also
FM′ = IM′, mithin M′ ein Punct der Parabel (§. 279. II. Zus.).

Anmerkung. Es leuchtet für sich ein, wie wenig Schärfe man bey der I. Auflösung für die zwischen ein Paar Ordinaten liegenden Puncte, und bey der II. Auflösung für die ganze gezogene Linie zu erwarten habe.

§. 281.

Aufgabe:

Für den Punct M der Parabel, oder die gegebene Abscisse AP = x den Krümmungshalbmesser MC zu suchen.

Auf-

Auflösung:

1. Da man die Abtheilungen auf der Abscissenlinie nach Belieben nehmen kann, so macht man sie einander gleich, folglich ist dx eine beständige Größe, mithin

2. Der Krümmungshalbmesser jeder krummen Linie, oder

$$MC = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} \text{ (§. 264. I. Zus.)}$$

3. Nun ist für die Parabel:

$y^2 = px$, also

$2\,ydy = pdx$, und

$dy = \frac{pdx}{2\,y} = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, mithin

$dy^2 = \frac{p^2\,dx^2}{4px}$, also

4. $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = (dx^2 + \frac{p^2\,dx^2}{4\,px})^{\frac{3}{2}}$

$= (\frac{4\,pxdx^2 + p^2\,dx^2}{4\,px})^{\frac{3}{2}} = \frac{(4\,px + p^2)^{\frac{3}{2}}\,dx^3}{8\,p^{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{3}{2}}}$

5. Ferner da $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$ (Nr. 3.)

$= \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx$, so ist

$d^2\,y = -\frac{1}{4}\,p^{\frac{1}{2}}\,x^{-\frac{3}{2}}\,dx^2$ (§. 313. Arithm.) und

$dxd^2\,y = -\frac{1}{4}\,p^{\frac{1}{2}}\,x^{-\frac{3}{2}}\,dx^3 = -\frac{p^{\frac{1}{2}}\,dx^3}{4\,x^{\frac{3}{2}}}$, mithin

6.

6. Für die Parabel

$$MC = \frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} dx^3}{8 p^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}}} \times \frac{4 x^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}} dx^3} \text{ (Nr. 2, 4, u. 5.)}$$

$$= \frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2 p^2}$$

7. Da nun keine Hilfsgröße mehr vorkömmt, so ist letztere eine vollständige Gleichung.

I. Zusatz: Will man den Krümmungshalbmesser der Parabel aus der Formel: $MC = - \frac{n^3 dx^2}{y^3 d^2 y}$ (§. 264. II. Zus.) suchen, so ist

$$n = \frac{(4px + p^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$$ (§. 276. I. Zus.) mithin

$$n^3 dx^2 = \frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} dx^2}{8}$$

Ferner $y^3 d^2 y = p^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \times - \frac{1}{4} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx^2$ (N. 5.)

$= - \frac{1}{4} p^2 dx^2 = - \frac{p^2 dx^2}{4}$, folglich

$$MC = \frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}} dx^2}{8} \times \frac{4}{p^2 dx^2}$$

$= \frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2 p^2}$ wie vorher

II. Zusatz: Für den Scheitel der Parabel ist $x = 0$ mithin

$$MC = \frac{p^3}{2 p^2} = \frac{1}{2} p.$$

III.

III. Zusatz: Die Lage des Krümmungshalbmessers ist durch die Lage der Normal (§. 256. I. Zus.) mithin durch die Lage der Tangens, oder Größe der Subnormal gegeben (§. 276. IV. und V. Zus.)

§. 282.

Aufgabe: (Fig. 89.)

Den Bogen AM der Parabel zu rectificiren.

I. Auflösung: Wenn man die Länge desselben durch den Parameter p und Abscisse x bestimmen will.

1. Für jedes Stück Z einer krummen Linie ist

$$Z = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (§. 267.)}$$

2. Nun ist für die Parabel:

$$y^2 = px, \text{ also } 2ydy = pdx, \text{ und}$$

$$dy = \frac{pdx}{2y} = \frac{pdx}{2\sqrt{px}} = \tfrac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx, \text{ mithin}$$

$$dy^2 = \tfrac{1}{4} px^{-1} dx^2, \text{ und}$$

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (dx^2 + \tfrac{1}{4} px^{-1} dx^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 + \tfrac{1}{4} px^{-1})^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} dx (x + \tfrac{1}{4} p)^{\frac{1}{2}}, \text{ folglich}$$

3. der Bogen $AM = \int x^{-\frac{1}{2}} dx (x + \tfrac{1}{4} p)^{\frac{1}{2}} + C$

4. Nun steht dieses Differential offenbar unter der Form $x^n dx (a + bx^m)^p$; wo nemlich $n = -\frac{1}{2}$; $m = 1$, $p = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{4} p$, und $b = 1$ ist.

5.

5. Wenn man ferner §. 252. VI. Tab. Nr. 8. $b = 1$; $x = \frac{1}{4} p$, also

$bx^{\frac{1}{2}} dx (x + a)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} dx (x + \frac{1}{4} p)^{\frac{1}{2}}$ setzt, so ist

6. letztere Differentialgröße unter der Form

$x^r dx (a + bx^m)^p$ enthalten, und $r = \frac{1}{2}$, das Uebrige wie Nr. 4.

7. Ferner ist aus obiger Tabelle VI. Nr. 8.

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx (x + \tfrac{1}{4} p)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{4}(2x + \tfrac{1}{4} p)\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}px)}$$
$$- \frac{1}{128} p^2 \log. nat. [x + \tfrac{1}{8} p + \sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4} px)}]$$

8. Nun ist $(n - r) : m = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) : 1 = -1$ also eine negative ganze Zahl, folglich läßt sich aus dem Integrale Nr. 7. jenes von Nr. 3. finden (§. 348 Arith.)

9. Man verwechsle nun die Substitutionen Nr. 4. und 6., oder setze $x^{\frac{1}{2}} dx (x + \frac{1}{4} p)^{\frac{1}{2}}$ $= x^n dx (a + bx^m)^p$, also $n = \frac{1}{2}$, und $x^{-\frac{1}{2}} dx (x + \frac{1}{4} p)^{\frac{1}{2}} = x^r dx (a + bx^m)^p$ mithin $r = -\frac{1}{2}$ so ist

10. $(n - r) : m = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) : 1 = 1$; folglich nach §. 346. Arithm.

11. $$\int x^n dx (a + bx^m)^p = \frac{x^f (a + bx^m)^{p+1}}{bg}$$
$$- \frac{af}{bg} \int x^r dx (a + bx^m)^p + C$$

12. Ausser den Nr. 4 und 9 bestimmten Werthen ist noch

$f = 1 + n - m = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, und
$g = 1 + n + m\,p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$; folglich substituirt

13. $\int x^{\frac{1}{2}}\, dx\, (x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\,(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{3}{2}}}{2}$

$- \frac{1}{16}\, p \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx\, (x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} + C$ mithin

14. $\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx\, (x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} = \frac{8\, x^{\frac{1}{2}}\,(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{3}{2}}}{p}$

$- \frac{16}{p} \int x^{\frac{1}{2}}\, dx\, (x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} = \frac{8\, x^{\frac{1}{2}}\,(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{3}{2}}}{p}$

$- \frac{4\,(2x + \frac{1}{4}p)\,\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}}{p}$

$+ \frac{1}{8}\, p$ log. nat. $[x + \frac{1}{8}p + \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}]$
$+ C$ (Nr. 7.).

15. Nun ist $\frac{8x^{\frac{1}{2}}\,(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{3}{2}}}{p} = \frac{8x^{\frac{1}{2}}\,(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{4}p)}{p}$

$= \frac{8\,(x^2 + \frac{1}{4}px)^{\frac{1}{2}}\,(x + \frac{1}{4}p)}{p}$

$= \frac{8x + 2p}{p} \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}$.

16. Ferner $\frac{4\,(2\,x + \frac{1}{4}p)\,\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}}{p}$

$= \frac{8\,x + p}{p} \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}$, also

17. $\frac{8x^{\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{4}p)^{\frac{3}{2}}}{p} - \frac{4(2x+\frac{1}{4}p)\sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)}}{p}$

$= \frac{8x+2p-8x-p}{p}\sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)}$

$= \sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)}$; folglich

18. $\int x^{-\frac{1}{2}}dx(x+\frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)}$
$+ \frac{1}{8}p$ log. nat. $[x+\frac{1}{8}p+\sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)}]$
$+ C$ (Nr. 14.) $=$ AM.

19. Wenn nun $x = 0$, so ist für die Parabel auch AM $= 0$, mithin in vorhergehender Gleichung

20. $0 = \frac{1}{8}p$ log. nat. $\frac{1}{8}p + C$, also
$C = -\frac{1}{8}p$ log. nat. $\frac{1}{8}p$; folglich

21. AM $= \sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)} + \frac{1}{8}p$ log. nat. $[x+\frac{1}{8}p$
$+\sqrt{(x^2+\frac{1}{4}px)}] - \frac{1}{8}p$ log. nat. $\frac{1}{8}p$.

22. So wie nun alle Hilfsgrößen entfernt sind, so ist letztere eine vollständige Gleichung.

II. Auflösung: Wenn man den Bogen AM durch den Parameter p und die Ordinate y bestimmen will.

23. $dx = \frac{2ydy}{p}$ (Nr. 2), mithin

$dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$, und

$dx^2 + dy^2 = dy^2 + \frac{4y^2dy^2}{p^2}$

$= (1 + \frac{4y^2}{p^2})\, dy^2$, mithin

24. $(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + \frac{4y^2}{p^2})^{\frac{1}{2}} dy$

$= (\frac{1}{4} p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{2 dy}{p}$, also

25. $AM = \int \frac{2}{p} dy (\frac{1}{4} p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + C$ (Nr. 1.)

$= \frac{y}{p} \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + y^2)}$

$+ \frac{1}{4} p$ log. nat. $[y + \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + y^2)}] + C$

(§. 252. Tab. VI. Nr. 6.)

36. Nun ist für $y = 0$, auch $AM = 0$, also

27. $0 = \frac{1}{4} p$ log. nat. $\sqrt{\frac{1}{4} p^2} + C$, mithin

$C = - \frac{1}{4} p$ log. nat. $\frac{1}{2} p$, folglich

28. $AM = \frac{y}{p} \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + y^2)} + \frac{1}{4} p$ log. nat. $[y$

$+ \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + y^2})] - \frac{1}{4} p$ log. nat. $\frac{1}{2} p$

$= \frac{y}{p} \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + y^2)} + \frac{1}{4} p$ log. nat. $\frac{y + \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + y^2)}}{\frac{1}{2} p}$

I. Zusatz: Wenn $x = \frac{1}{4} p$ gegeben ist, so wird

$x^2 + \frac{1}{4} px = \frac{1}{16} p^2 + \frac{1}{16} p^2 = \frac{2}{16} p^2$, also

$\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4} px)} = \frac{1}{4} p \sqrt{2}$, mithin Nr. 21 oder Fig. 89.

$AM' = \frac{1}{4} p \sqrt{2} + \frac{1}{8} p$ log. nat. $\frac{\frac{1}{4}p + \frac{1}{8}p + \frac{1}{4}p\sqrt{2}}{\frac{1}{8}p}$

$= \frac{1}{4} p \sqrt{2} + \frac{1}{8} p$ log. nat. $\frac{\frac{3}{8} + \frac{2}{8}\sqrt{2}}{\frac{1}{8}}$

$= \frac{1}{4} p \sqrt{2} + \frac{1}{8} p$ log. nat. $(3 + 2\sqrt{2})$.

Nun ist $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$, mithin

log. nat. $(3 + 2\sqrt{2}) = 2$ log. nat. $(1 + \sqrt{2})$

(§. 229. Arithm.) folglich

$AM' = \frac{1}{4} p \sqrt{2} + \frac{2}{8} p \log. nat. (1 + \sqrt{2})$
$= \frac{1}{4} p [\sqrt{2} + \log. nat. (1 + \sqrt{2})]$

II. Zusatz Ist hingegen die Ordinate $y = \frac{1}{2} p$, so ist
$AM' = \frac{1}{2} \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{4} p^2)}$
$+ \frac{1}{4} p \log. nat. \frac{(\frac{1}{2} p + \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{4} p^2)})}{\frac{1}{2} p}$ (Nr. 28.)
$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{4} p^2} + \frac{1}{4} p. \log. nat. (1 + \sqrt{2})$
$= \frac{1}{4} p [\sqrt{2} + \log. nat. (1 + \sqrt{2})]$ wie im I. Zus.

§. 283.

Aufgabe: (Fig. 89.)

Die vom Bogen AM, und von den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM begränzte Ebene AMP der Parabel zu quadriren.

Auflösung:

1. Allgemein ist für jede, durch eine krumme Linie und ihre rechtwinklichten Coordinaten, begränzte Ebene:
$R = \int y\,dx$ (§. 268.)

2. Nun ist für die Parabel

$$y^2 = px; \text{ mithin } 2y\,dy = p\,dx; \; dx = \frac{2y}{p} dy,$$

$$\text{also } y\,dx = \frac{2y^2}{p} dy, \text{ folglich}$$

3. $AMP = \int \frac{2y^2}{p} dy + C = \frac{2y^3}{3p} + C$

4. Wenn aber $y = 0$; so ist auch AMP; folglich eben so $C = 0$, also

5.

5. $AMP = \frac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{p} = \frac{2}{3} \cdot \frac{y^2 . y}{p} = \frac{2}{3} \cdot \frac{pxy}{p}$

$= \frac{2}{3} xy.$

§. 284.

Lehrsatz: (Fig. 92.)

Wenn in der Parabel eine beliebige Sehne MR von der Axe AO in D durchschnitten wird, und man setzt das größere Stück der Sehne MD = m, das kleinere RD = n, und ihren spitzigen Winkel mit der Axe MDO = RDA = α, so ist für den Parameter p: das Segment MARM $= \frac{2 \sin. \alpha^2 (m^3 + n^3)}{3P}$

$- \frac{1}{4} \sin. 2\alpha (m^2 - n^2)$

Beweis:

1. Man ziehe die rechtwinklichten Ordinaten MP, und RS, so ist offenbar

2. Segm. MARM = APM + ASR − $\triangle$DPM + $\triangle$DSR.

3. Nun ist im Dreyecke DPM:
DM : PM = 1 : sin. PDM. oder
m : PM = 1 : sin. α; also PM = m. sin. α.

4. Ferner m : DP = 1 : cos. α; mithin DP = m cos. α.

5. $\triangle DPM = \frac{1}{2}$ DP. PM $= \frac{1}{2} m^2 \sin. \alpha \cos. \alpha$
$= \frac{1}{4} m^2 \sin. 2\alpha$ (§. 306. II. Zus. Trig.)

6.

6. Ferner $APM = \frac{2}{3} \frac{PM^3}{p}$ (§. 283. Nr. 5.)

$= \frac{2 m^3 \sin. \alpha^3}{3 p}$.

7. Eben so ist im rechtwinklichten Dreyecke RSD $n : RS = 1 : \sin. \alpha$, also $RS = n \sin. \alpha$, und $n : DS = 1 : \cos. \alpha$, mithin $DS = n \cos. \alpha$ folglich

8. $\triangle RSD = \frac{1}{2} DS. RS = \frac{1}{2} n^2 \sin. \alpha \cos. \alpha$
$= \frac{1}{4} n^2 \sin. 2 \alpha$

9. $ARS = \frac{2}{3} \frac{RS^3}{p} = \frac{2 n^3 \sin. \alpha^3}{3 p}$.

10. Setzt man diese Werthe Nr. 5, 6, 8, 9 in die Gleichung Nr. 2, so ist

11. $$Segm.\ MARM = \frac{2 m^3 \sin. \alpha^3}{3 p} + \frac{2 n^3 \sin. \alpha^3}{3 p} - \frac{1}{4} m^2 \sin. 2 \alpha + \frac{1}{4} n^2 \sin. 2 \alpha$$
$$= \frac{2 \sin. \alpha^3 (m^3 + n^3)}{3 p} - \frac{1}{4} \sin. 2\alpha (m^2 - n^2)$$

Zusatz: Für die Sehne MA wird $n = 0$, folglich

$$Segm.\ ALMA = \frac{2 m^3 \sin. \alpha^2}{3 p} - \frac{1}{4} m^2 \sin. 2 \alpha.$$

§. 285.

Aufgabe: (Fig. 89.)

Die Oberfläche des parabolischen Sphäroids, welches AMP beschreibt, zu quadriren.

Auf-

Auflösung:

1. Allgemein ist $Q = \int 2\pi y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + C$ (§ 270. Nr. II.)

2. Nun ist für die Parabel $y^2 = px$, also $2ydy = pdx$, und

$$dx = \frac{2y}{p} dy; \; dx^2 = \frac{4y^2}{p^2} dy^2, \text{ mithin}$$

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4y^2}{p^2} dy^2 + dy^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{p} dy, \text{ folglich}$$

3. $2\pi y (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi y}{p} (4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} dy$, mithin in der Parabel

4. $Q = \int \frac{2\pi y}{p} (4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} dy + C$

$$= \frac{2\pi y \, (4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} \, dy}{p \cdot \frac{3}{2} \cdot 8ydy} + C \text{ (§. 328. Arith.)}$$

$$= \frac{\pi}{6p} (4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

5. Für $y = 0$, ist offenbar auch $Q = 0$, mithin

$$0 = \frac{\pi}{6p} p^3 + C; \text{ also } C = -\tfrac{1}{6} p^2 \pi \text{ folglich}$$

6. $Q = \frac{\pi}{6p} (4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} p^2 \pi$

$$= \frac{\pi}{6p} (4px + p^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{6} p^2 \pi.$$

§. 286.

§. 286.

Aufgabe (Fig. 89.)

Das parabolische Sphäroid, welches AMP beschreibt, zu cubiren.

Auflösung:

1. Allgemein ist $K = \int \pi y^2 dx + C$ (§. 270. I).

2. Für die Parabel ist $y^2 = px$; $2ydy = pdx$; und $dx = \frac{2ydy}{p}$; also $\pi y^2 dx = \frac{2\pi y^3}{p} dy$; mithin

3. $K = \int \frac{2\pi y^3}{p} dy = \frac{2\pi y^4}{4p} + C = \frac{\pi y^4}{2p} + C.$

4. Für $y = 0$, ist auch $K = 0$, folglich auch $C = 0$, mithin

5. $K = \frac{\pi y^4}{2p} = \frac{\pi y^2 px}{2p} = \frac{1}{2} x \pi y^2 = \frac{1}{2} \pi px^2$

Zusatz: Das parabolische Sphäroid ist der Hälfte eines Cylinders gleich, welcher mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

III. Abschnitt.

Von der Ellipse.

§. 287.

Lehrsatz: (Fig. 87.)

Wenn man AB = a zur Abscissenlinie (§. 272. II. Zus.) und A zu ihrem Anfangspunct nimmt, ferner den Parameter = p, und die einem beliebigen

Puncte M der Ellipse entsprechenden rechtwinklichten Coordinaten x, y setzet, so ist in der Ellipse allgemein:

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a}$$

Beweis:

1. Man lege durch den Punct M der Ellipse eine Ebene zur Grundfläche des Kegels parallel, so ist alles wie §. 274. Nr. 1 — 5, mithin

2. $PM^2 = RP. PN.$

3. Ferner ziehe man im Axentriangel durch A und B zu NR die Parallelen AG, BL, so ist

4. $\triangle APN \backsim \triangle ABL$, mithin
$AB : BL = AP : PN$, also

5. $PN = \frac{BL. AP}{AB}$

6. Ferner $\triangle ABG \backsim \triangle PBR$, mithin
$AB : AG = BP : RP$, folglich

7. $RP = \frac{AG. BP}{AB}$

8. Setzt man diese Werthe Nr. 5 und 7 in die Gleichung Nr. 2, so wird

9. $PM^2 = \frac{AG. BP}{AB} \times \frac{BL. AP}{AB} = \frac{AG. BL}{AB} \times \frac{AP.BP}{AB}$

10 Nun ist der erste Factor eine beständige Größe, oder $\frac{AG. BL}{AB} = p$, folglich

11.

11. $y^2 = p. \frac{x(a-x)}{a} = \frac{apx}{a} - \frac{px^2}{a}$

$= px - \frac{px^2}{a}$

Zusatz: Da das Quadrat der Ordinate kleiner als das Rechteck aus der Abscisse und dem Parameter ist, so nannte man dieses Mangels wegen die Linie ελλειψις.

§. 288.

Lehrsatz: (Fig. 87.)

Wenn man den Winkel EDH $= \alpha$, und BAL $= \beta$, AB $=$ a setzt, so ist für jede Ellipse der Parameter, oder

$$p = \frac{2\, a\, \text{sin.}\, \beta\, (\text{sin.}\, \beta\, \text{cos.}\, \alpha - \text{cos.}\, \beta\, \text{sin.}\, \alpha)}{1 + \text{cos.}\, \alpha}$$

Beweis:

1. Im Dreyecke BAL ist:

AB : BL $=$ sin. ALB : sin. BAL, das ist

a : BL $=$ cos. $\frac{1}{2}\alpha$: sin. β; denn

2. ALB $=$ DAG $= 90° -$ ADC $= 90° - \frac{1}{2}\alpha$ mithin

sin. ALB $=$ cos. $\frac{1}{2}\alpha$, also

3. $BL = \frac{a\, \text{sin.}\, \beta}{\text{cos.}\, \frac{1}{2}\alpha}$

4. Ferner im Dreyecke ABG ist

AB : AG $=$ sin. BGA : sin. ABG.

5. Nun ist $BGA = 180^{\circ} - AGD$, also

$\sin. BGA = \sin. AGD = \cos. \frac{1}{2}\alpha$

6. Ferner ist

$ABG = ABD = 180^{\circ} - \alpha - DAB$

$= 180^{\circ} - \alpha - (180^{\circ} - \beta) = \beta - \alpha$, also

$\sin. ABG = \sin. (\beta - \alpha)$, folglich Nro. 4 substituirt, wird

7. $a : AG = \cos. \frac{1}{2}\alpha : \sin. (\beta - \alpha)$, mithin

8. $AG = \frac{a \sin. (\beta - \alpha)}{\cos. \frac{1}{2}\alpha}$

9. Nun ist für die Ellipse

$p = \frac{BL. AG}{AB}$ (§. 387. Nr. 10.), also

10. $p = \frac{a \sin. \beta}{\cos. \frac{1}{2}\alpha} . \frac{a \sin. (\beta - \alpha)}{\cos. \frac{1}{2}\alpha} : a$ (N. 3 und 8)

$= \frac{a \sin. \beta \sin. (\beta - \alpha)}{\cos. \frac{1}{2}\alpha^2}$

$= \frac{a \sin. \beta (\sin. \beta \cos. \alpha - \cos \beta \sin. \alpha)}{\frac{1 + \cos. \alpha}{2}}$ (§. 307. I. Zus. Trig.) (§. 308. IV. Zus. Trig.)

$= \frac{2 a \sin. \beta (\sin. \beta \cos. \alpha - \cos. \beta \sin. \alpha)}{1 + \cos. \alpha}$

1. Zusatz: Eine Linie, in welcher $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, ist eine Ellipse. Denn die beständigen Größen

p,

p, a mögen jeden beliebigen Werth haben, so läßt sich nach dem Lehrsatz für einen Kegel, wo der Winkel EDH $= \alpha$ entweder gegeben, oder beliebig angenommen ist, allemal der Winkel β $=$ BAH so bestimmen, daß der Schnitt eine Ellipse giebt, die mit der gegebenen Linie einerley ist.

II. Zusatz: Da $y = \pm \sqrt{(px - \frac{px^2}{a})}$, so theilt AB alle auf ihr senkrecht stehenden Sehnen in zwey gleiche Theile, und ist also die Axe (§. 255.), man heißt sie, da es für die Ellipse noch eine Axe giebt, die große oder Zwergaxe (axis major, axis tranversus).

III. Zusatz: Für $x = 0$ sowohl, als $x = a$, ist allemal $y = 0$, mithin ist A sowohl als B ein Scheitelpunct der Ellipse, und sie selbst eine in sich zurückkehrende Linie.

IV. Zusatz: Für $x = \frac{1}{2} a$, wird $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{ap}$; denn

$$y^2 = \frac{1}{2} ap - \frac{\frac{1}{4} a^2 p}{a} = \frac{1}{4} ap \text{; also } y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{ap}.$$

V. Zusatz: Setzt man den Parameter der großen Axe gleich, oder $p = a$, so ist $y^2 = ax - x^2$, folglich die Ellipse ein Kreis.

VI. Zusatz: Nimmt man hingegen $a = \infty$, so wird $y^2 = px$, das heißt, man kann sich die Parabel als eine Ellipse vorstellen, in welcher die große Axe unendlich ist.

VII.

VII. Zusätz: Für eine Absciſſe, die im Verhältniße zur großen Axe sehr klein ist, wird $\frac{px^2}{a}$ ein sehr kleiner Bruch, also y^2 beynahe $= px$; man kann also nahe am Scheitel der Ellipse ihren Bogen als einen Theil der Parabel vom nemlichen Parameter nehmen.

§. 289.

Lehrsatz: (Fig 93.)

Wenn man den Mittelpunct C der großen Axe AB zum Anfangspunct der Absciſſen nimmt, und letztere $= u$ setzt, so ist $y^2 = \frac{1}{4} ap - \frac{pu^2}{a}$

Beweis:

1. $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ (§. 287).

2. Nun ist $CP = AC - AP$, oder $u = \frac{1}{2} a - x$, mithin

3. $x = \frac{1}{2} a - u$, und

4. $x^2 = \frac{1}{4} a^2 - au + u^2$, also

5. $y^2 = p(\frac{1}{2} a - u) - \frac{p}{a}(\frac{1}{4} a^2 - au + u^2)$ (N. 1)

$$= \frac{1}{2} ap - pu - \frac{1}{4} ap + pu - \frac{pu^2}{a}$$

$$= \frac{1}{4} ap - \frac{pu^2}{a}$$

I.

I. Zusatz: Für $u = 0$, wird $y^2 = \frac{1}{4}ap$, also auch $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{ap}$ ein größtes, das ist dem Mittelpuncte der großen Axe entspricht die größte Ordinate.

II. Zusatz: Für $y = \frac{1}{2}p$, also $y^2 = \frac{1}{4}p^2$, wird

$\frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}ap - \frac{pu^2}{a}$, oder

$\frac{1}{4}p = \frac{1}{4}a - \frac{u^2}{a}$; mithin

$u^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ap$; folglich

$u = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ap)}$, das heißt:

Auf jeder Seite des Mittelpunctes giebt es in gleicher Entfernung auf der großen Axe einen Punct, wo die Ordinate dem halben Parameter gleich ist, oder einen Brennpunct (§. 273. b).

III. Zusatz: Wenn man die Entfernungen $CF = cf$ der beyden Brennpuncte vom Mittelpuncte C mit e bezeichnet, so ist $e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ap)}$.

IV. Zusatz: $AF = \frac{1}{2}a - e = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ap)}$ und $Af = \frac{1}{2}a + e = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ap)}$.

V. Zusatz: Nimmt man die durch den Mittelpunct C auf der großen Axe senkrecht stehende Linie DE zur Abscissenlinie, und C als ihren Anfangspunct, so ist

die Abscisse $Cm = x = PM = y$;

die Ordinate $mM = \mathfrak{y} = CP = u$; mithin

$x^2 = \frac{1}{4}ap - \frac{p\mathfrak{y}^2}{a}$ (Lehrs.), und

$\frac{p\,y^2}{a} = \frac{1}{4}\,ap - x^2$, also

$y^2 = \frac{1}{4}\,a^2 - \frac{ax^2}{p}$, folglich

$y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}\,a^2 - \frac{ax^2}{p})}$, das ist, DE theilt alle auf ihr senkrecht stehenden Sehnen in 2 gleiche Theile, mithin ist sie eine Axe der Ellipse (§. 255.).

§ 290.

Erklärung: (Fig. 93.)

Die durch den Mittelpunct auf der großen Axe AB senkrecht errichtete Linie, oder Axe (§. 289. V. Zus.), wenn sie beyderseits bis an die Ellipse gezogen wird, oder DE heißt die kleine oder vereinigte Axe der Ellipse (axis minor, axis conjugatus) uud wird in der Folge allemal mit c bezeichnet.

I. Zusatz: $c = \sqrt{ap}$; denn $\frac{1}{2}\,c = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$ (§. 289. I. Zus.) mithin ist

II. Zusatz: die kleine Axe die mittlere geometrische Proportional zwischen der großen Axe und dem Parameter, so wie letzterer die dritte Proportional zur großen und kleinen Axe ist.

III. Zusatz: $y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$, denn $p = \frac{c^2}{a}$ (II. Zus.)

setzt

setzt man nun diesen Werth in die Gleichung §. 287. so erhält man die aufgestellte Gleichung für die Ellipse zwischen ihren beyden Axen.

IV. Zusatz: Setzt man $a = c$, so wird $y^2 = ax - x^2$, also die Ellipse zum Kreise, oder letzterer ist eine Ellipse, wo beyde Axen einander gleich sind.

V. Zusatz: Nimmt man auf der großen Axe ihren Mittelpunct C als Anfangspunct der Abscissen, oder setzt in der Gleichung des IIIten Zusatzes

$u = \frac{1}{2} a - x$, also

$x = \frac{1}{2} a - u$, und $x^2 = \frac{1}{4} a^2 - au + u^2$, so wird

$$y^2 = \frac{c^2}{a} (\tfrac{1}{2} a - u) - \frac{c^2}{a^2} (\tfrac{1}{4} a^2 - au + u^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} c^2 - \frac{c^2 u}{a} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^2 u}{a} - \frac{c^2 u^2}{a^2}$$

$$= \tfrac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} (\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)$$

VI. Zusatz Die Entfernung eines Brennpunctes vom Mittelpuncte der großen Axe, oder $e = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)}$ (§. 289. III. Zus.)

VII. Zusatz: Für den Kreis wird $e = 0$, das ist, beyde Brennpuncte fallen im Mittelpuncte des Kreises zusammen.

VIII. Zusatz: Beschreibt man aus dem Mittelpuncte C der größern Axe mit ihrer Hälfte CA einen Halbkreis AM'B, so ist $PM'^2 = AP.PB = ax - x^2$, und

und in der Ellipse $PM^2 = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2}$ (III. Zus.)

$= \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2)$, also $PM^2 : PM'^2$

$= \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2) : ax - x^2 = \frac{c^2}{a^2} : 1$

$= c^2 : a^2$, mithin $PM : PM' = c : a$

IX. Zusatz: Wenn für eine Linie von den nachstehenden Gleichungen:

1. $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ (§. 287.)

2. $y^2 = \frac{1}{4}ap - \frac{pu^2}{a}$ (§. 289.)

3. $y^2 = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2}$ (III. Zus.)

4. $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$ (V. Zus.)

eine davon erwiesen ist, so ist die Linie eine Ellipse. Denn so wie die drey letztern Gleichungen aus der ersten abgeleitet sind, so folgt die erste aus jeder der drey übrigen; wenn aber von einer Linie die erste Gleichung gilt, so ist sie eine Ellipse (§. 288. I. Zus.), folglich auch, wenn eine der 3 übrigen Statt hat.

X. Zusatz: Nimmt man vom Mittelpuncte C aus auf der kleinen Axe die Abscissen, so ist die Abscisse $Cm = PM = y$, die Ordinate $mM = CP = u$; da nun $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - u^2)$ (V. Zus.)

also

also $\frac{a^2 y^2}{c^2} = \frac{1}{4} a^2 - u^2$, und $u^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2}$ $= \frac{a^2}{c^2} (\frac{1}{4} c^2 - y^2)$ das ist man erhält auf der kleinen Axe als Abscissenlinie eine ähnliche Gleichung, wie für die große Axe.

§. 291.

Lehrsatz: (Fig. 94.)

Wenn man von den beyden Brennpuncten F, f, nach einem beliebigen Puncte M der Ellipse gerade Linien ziehet, so ist ihre Summe allemal der großen Axe gleich; oder $FM + fM = a$.

Beweis:

1. Man ziehe die rechtwinklichten Ordinate PM, so ist
2. $FM^2 = PM^2 + PF^2$, und eben so
3. $fM^2 = PM^2 + Pf^2$.
4. Nimmt man nun C zum Anfangspunct der Abscissen, und setzt $CP = u$, und $CF = Cf$ $= e = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)}$ (§. 290 VI. Zus.); so ist
5. $PF = e - u = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)} - u$, also $PF^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} c^2 - u \sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2$; ferner
6. $PM^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2}$ (§. 290. V. Zus.), folglich diese beyden Werthe Nr. 2 gesetzt geben

7.

7. $FM^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2} + \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} c^2$

$- u \sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2$

$= \frac{1}{4} a^2 - u \sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2 - c^2}{a^2} u^2$

folglich

8. $FM = \pm \left(\frac{1}{2} a - \frac{u \sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}\right)$ (§. 100. I. Zus. und 121. Arithm.)

9. Von diesen beyden Werthen der Gleichung ist jener der wahre, welcher eine positive Größe für FM giebt.

10. Nun kann u nie größer als $\frac{1}{2}$ a seyn, und wenn selbst $u = \frac{1}{2}$ a gesetzt wird, so ist $\frac{1}{2}$ a $- \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)}$ noch eine positive Größe, um so mehr also, wenn $u < \frac{1}{2}$ a genommen wird; folglich giebt die Gleichung:
$FM = \frac{1}{2} a - \frac{u \sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$ allemal eine positive Größe.

11. Wollte man hingegen das untere Zeichen oder $FM = -\frac{1}{2} a + \frac{u \sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$ nehmen, so giebt solches eine negative Größe, weil selbst beym größten Werthe von u, oder für $u = \frac{1}{2}$ a, noch $\frac{1}{2} a > \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)}$ ist; also giebt Nr. 10. den wahren Werth für FM.

12. Ferner ist $Pf = e + u = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)} + u$, also

$Pf^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2$, mithin Nr. 3. wenn man diesen Werh und jenen aus Nr. 6 substituirt

13. $fM^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2}$

$= \frac{1}{4}a^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2 - c^2}{a^2}u^2$; folglich

14. $fM = \pm\left(\frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}\right)$; da aber nur das obere Zeichen eine positive Größe giebt, so ist

$fM = \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$; folglich

15. $FM + fM = \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} + \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$ (Nr. 10. und 14.) $= a$

I. Zusatz: Zieht man nach dem Endpunct D der kleinen Axe von den beyden Brennpuncten gerade Linien, so ist jede der halben großen Axe gleich, denn $FD + fD = a$, ferner $FD = fD$, also jede $= \frac{1}{2}a$.

II. Zusatz: Wenn von einer Ellipse die Lage der großen Axe AB gegeben ist, so findet man ihre beyden Brennpuncte, wenn man die große Axe halbirt, und durch C die kleine Axe DE errichtet, und von D aus mit $\frac{1}{2}a$ einen Kreis beschreibt, so

so schneidet solcher die große Axe in den beyden Brennpuncten.

§. 292.

Lehrsatz: (Fig. 94.)

Wenn in der Sehne AB = a einer krummen in sich selbst zurückkehrenden Linie AMDBE zwey Puncte F, f von so einer Beschaffenheit sind, daß für jeden Punct M der krummen Linie allemal FM + fM = a, so ist die krumme Linie eine Ellipse, die Sehne AB ihre große Axe, und F, f die beyden Brennpuncte derselben.

Beweis:

1. Es ist fM + FM = a (per hyp.) setzt man ferner
   fM — FM = d so ist nach §. 86. Arithm.
2. $fM = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} d$, und
   $FM = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} d$, mithin
3. $fM^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} ad + \frac{1}{4} d^2$, und
4. $FM^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2} ad + \frac{1}{4} d^2$, folglich
5. $fM^2 - FM^2 = ad$.
6. Nun halbire man Ff in C, und errichte durch C einen Perpendikel DE, bis solcher zu beyden Seiten mit der krummen Linie zusammenstoßt.
7. Ziehe ferner die geraden Linien FD, FE, fD, fE, so ist
8. $\triangle FCD \cong \triangle fCD$, mithin

FD = fD = $\frac{1}{2}$ a, weil ihre Summe = a ist.

9. Eben so ist △FCE $\underset{\infty}{=}$ △fCE, also auch
FE = fE = $\frac{1}{2}$ a, mithin

10. FD = FE, also auch CD = CE = $\frac{1}{2}$ DE (§. 39. II. Zus. Geom.) oder für DE = c, ist CD = CE = $\frac{1}{2}$ c.

11. Ferner ist fA + FA = FB + fB = a (per hyp.), oder fF + 2FA = Ff + 2fB; also FA = fB, mithin

12. AF + FC = Bf + fC = $\frac{1}{2}$ AB, oder AC = BC = $\frac{1}{2}$ a, also ist

13. C der gemeinschaftliche Mittelpunct der beyden Sehnen a, c.

14. Im rechtwinklichten Dreyecke FCD ist
$CF^2 = FD^2 - CD^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} c^2$ (Nr. 8. und 10.), mithin
$CF = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)}$ (§. 97. Geom.) = Cf. (Nr. 6.)

15. Nun ziehe man die rechtwinklichte Ordinate PM = y, und setze ihre Abscisse vom Mittelpunct an, oder CP = u, so ist

16. $PF = CF - CP = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)} - u$, und

17. $Pf = Cf + CP = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)} + u$.

18. In den rechtwinklichten Triangeln fPM, FPM ist

19. $fM^2 = PM^2 + Pf^2 = y^2 + \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} c^2 + u \sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2$, und

20.

20. $FM^2 = PM^2 + PF^2 = y^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 - u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2$, also

21. $fM^2 - FM^2 = 2u\sqrt{(a^2 - c^2)} = ad$ (Nr. 5.). mithin

22. $d = \frac{2u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$, und

$$d^2 = \frac{4u^2(a^2 - c^2)}{a^2} = 4u^2 - \frac{4c^2u^2}{a^2}.$$

23. Ferner erhält man aus Nr. 3 und 19. nachstehende Gleichung:
$y^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{4}d^2$, oder
$y^2 - \frac{1}{4}c^2 + u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2 = \frac{1}{2}ad + \frac{1}{4}d^2$
$= u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$ (N. 22), also

24. $y^2 - \frac{1}{4}c^2 = -\frac{c^2u^2}{a^2}$, folglich

$$y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$$

25. Nun ist $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2})}$ folglich theilet a alle auf ihr senkrechte Sehnen in gleiche Theile, ist also eine Axe der krummen Linie (§.255.)

26. Nimmt man DE zur Abscissenlinie und C als ihren Anfangspunct, so ist die Abscisse Cm =

PM

PM $= y$, und die Ordinate Mm $=$ CP $= u$, folglich Nr. 24. wird

$$u^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2}, \text{ und}$$

$$u = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2}\right)},$$ mithin ist c ebenfalls eine Axe.

27. Es ist aber FD $>$ CD, oder $\frac{1}{2} a > \frac{1}{2} c$ (Nr. 8 und 10.) also $a > c$ mithin a die größere und c die kleinere Axe.

28. Da nun für diese beyden Axen und die Abscissen vom Mittelpunct an gerechnet $y^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{cu^2}{a^2}$ ist, so ist die krumme Linie eine Ellipse (§. 290. IX. Zus.); und

29. weil endlich CF $=$ Cf $= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)}$ (Nr. 14.), so sind F, f die beyden Brennpuncte derselben (§. 290. VI. Zus.)

Zusatz: Wenn man also auf einer geraden Linie AB zwey von den Endespuncten A, B gleich weit abstehende Puncte F, f, ferner eine Schnur von der Länge AB nimmt, und das eine End dieser Schnur in F, das andere in f befestiget, und solche mit einem Bleystifte auf jeder Seite gespannt von A bis B dreht, so beschreibt der Bleystift eine Ellipse.

§. 293.

Lehrsätze: (Fig: 95.)

In der Ellipse ist für den Punct M

I. die Subtangens $PT = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$

II. die Subnormal $PN = \frac{ap - 2px}{2a} = \frac{pu}{a}$

Beweis:

1. Für jede krumme Linie ist $\text{Subt.} = \frac{ydx}{dy}$ (§. 257. I.)

2. Nun für die Ellipse ist:

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a} \text{ (§. 287.), mithin}$$

$$2ydy = pdx - \frac{2pxdx}{a} = \frac{ap - 2px}{a} dx;$$

mithin

$$\frac{2ay}{ap - 2px} = \frac{dx}{dy}, \text{ also}$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{2ay^2}{ap - 2px} = \frac{2a\left(px - \frac{px^2}{a}\right)}{ap - 2px}$$

$$= \frac{2a^2px - 2apx^2}{a^2p - 2apx} = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}, \text{ folglich}$$

in der Ellipse

3. $\text{Subt. } PT = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$ Nr. I.

4. Ferner ist allgemein Subnorm. $= \frac{ydy}{dx}$ (§. 258. I.)

5. In der Ellipse ist aber $2y\,dy = \frac{ap - 2px}{a}\,dx$, mithin

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{ap - 2px}{2a};$$ folglich

6. Subnormal PN $= \frac{ap - 2px}{2a} = \frac{p}{a}(\frac{1}{2}a - x)$

$$= \frac{p}{a}u \text{ (§. 289. Nr. 3.)} = \frac{pu}{a} \text{ Nr. II.}$$

I. Zusatz: Nimmt man die Abscisse vom Mittelpuncte, oder $u = \frac{1}{2}a - x$ (§. 290. V. Zus.) also $x = \frac{1}{2}a - u$, so ist $2ax - 2x^2 = \frac{1}{2}a^2 - 2u^2$ $= \frac{a^2 - 4u^2}{2}$, ferner $a - 2x = 2u$, also

$$\frac{2ax - 2x^2}{a - 2x} = \frac{a^2 - 4u^2}{4u},$$ oder

Subt. PT $= \frac{a^2 - 4u^2}{4u}$

II. Zusatz: Aus der Subtangens PT und Ordinate PM läßt sich nun allemal leicht die Tangens TM; so wie aus der Subnormal PN und der Ordinate PM die Normal MN finden (§. 97 Geom.)

§. 294.

Aufgabe: (Fig. 95.)

Für einen gegebenen Punct M der Ellipse eine Tangens zu ziehen.

I. Auflösung:

1. Man berechne die Subtangens PT (§. 293.) und
2. trage solche auf der verlängerten großen Axe auf.
3. Nun ziehe man von T nach M die gerade Linie TQ, so berührt solche die Ellipse im Puncte M.

Beweis:

Die Tangens geht durch M und T (§. 256.), zwischen 2 Puncten giebt es aber nur eine gerade Linie.

II. Auflösung:

4. Man ziehe die beyden Radios Vectores FM, fM,
5. verlängere letzern um MR = MF, und
6. halbire den Winkel FMR durch die gerade Linie MT, so ist letztere die gesuchte Tangens.

Beweis:

7. Man ziehe FR, so steht MT auf ihr senkrecht, und halbirt sie; ferner ist fR = fM + FM (ex constr.) = a (§. 291.)
8. Würde nun MT ausser M noch einen andern Punct m mit der Ellipse gemein haben, so ziehe man
9. die geraden Linien Fm, fm, und Rm.
10. Nun ist Fm = Rm (§. 38 III. Zus. Geom.) mithin müßte

11. Rm + fm = Fm + fm = a (§. 291.) = fR (Nr. 7.) seyn, welches unmöglich ist (§. 35. Geom.)

I. Zusatz: Für einen Punct M der Ellipse giebt es nur eine Tangens MT; denn durch den Punct M ist die Subtangens PT (§. 293.), also der Punct T auf der großen Axe vollkommen bestimmt, zwischen zwey Puncten T und M giebt es aber nur eine gerade Linie.

II. Zusatz: Die Tangens MT halbirt allemal den Winkel FMR, welchen der eine Radius Vector FM mit der Verlängerung MR des andern ein-einschließt (II. Aufl. und I. Zus.).

III. Zusatz: Um für einen gegebenen Punct M der Ellipse die Normal zu ziehen, darf man nur erst die Tangens verzeichnen, und auf ihr durch den Punct M einen Perpendikel MN errichten, und bis zur Axe verlängern, so ist solcher die gesuchte Normal (§. 256. b. α)

IV. Zusatz: Die beyden Radii Vectores FM, fM machen mit der Tangens TMQ gleiche Winkel, oder fMQ = FMT.
Denn FMT = RMT (II. Zus.)
fMQ = RMT als Vertikalwinkel, mithin
fMQ = FMT.

V. Zusatz: Verlängert man FM bis S und eben so fM bis R, so ist ebenfalls RMT = SMQ.

VI.

VI. Zusatz: Die Winkel der beyden Linien FM und fM mit der Normal MN sind gleich, oder fMN = FMN.

Denn QMf + fMN = 90° = TMF + FMN.

Nun ist aber QMf = TMF (IV. Zusatz) also auch fMN = FMN.

VII. Zusatz: Eben so schliessen die verlängerten Linien fR, FS mit der Verlängerung Mn der Normale gleiche Winkel ein, oder RMn = SMn.

Anwendung: Auf den Zusätzen IV — VII. beruhet der Beweis, daß sich Strahlen vom Schalle sowohl, als vom Lichte, welche aus einem Brennpuncte der Ellipse herkommen, sich im andern sammeln, und an der erhabenen Seite, jene Strahlen, welche in der Richtung SM kommen, nach der Richtung MR zurückgeworfen werden.

§. 295.

Lehrsatz: (Fig. 96.)

Wenn man durch den Berührungspunct M der Tangens TM, und den Mittelpunct C der großen Axe AB, die Sehne MG, und eine andere Sehne IH durch eben den Mittelpunct C zur Tangens parallel zieht, erstere Sehne oder MG zur Abscissenlinie, und C zum Anfangspunct der Abscissen nimmt, ferner die Ordinaten RO, IC parallel zur Tangens TM sind, und CM = $\frac{1}{2}$ m; CI = $\frac{1}{2}$ n, die Abscisse CO = w, und die Ordinate RO = Z gesetzt wird, so ist:

$$Z^2 = \frac{n^2}{m^2}\left(\tfrac{1}{4}m^2 - w^2\right)$$

Beweis:

1. Man ziehe aus O, M und R auf die große Axe die Perpendikel OQ, MP, RV, so ist der bisherigen Bezeichnung gemäß:

2. CA $= \frac{1}{2}$ a; CP $=$ u, PM $=$ y; Subt. PT $=$ s; tang. TM $=$ t.

3. Durch O ziehe man ferner zur großen Axe die Parallele ON, bis solche mit der verlängerten VR in N zusammenstoßt, so ist

4. $\triangle RNO \backsim \triangle TPM$; denn N $=$ P $= 90°$, und NOR $= 90° -$ ROQ $= 90° -$ r $= 90° -$ TMP $=$ MTP, also

5. MT : PM $=$ OR : NR, oder
t : y $=$ Z : NR, mithin
$$NR = \frac{yZ}{t}.$$

6. MT : PT $=$ RO : NO, oder
t : s $=$ Z : NO, also
$$NO = \frac{sZ}{t}.$$

7. Ferner $\triangle COQ \backsim \triangle CMP$, mithin
CM : PM $=$ CO : OQ, das ist
$\frac{1}{2}$ m : y $=$ w : OQ, folglich
$$OQ = \frac{2\,yw}{m}$$

8.

8. CM : CP = CO : CQ, oder

$\frac{1}{2}$ m : u = w : CQ, also

$CQ = \frac{2uw}{m}$, und

9. $RV = NV - NR = OQ - NR$

$= \frac{2yw}{m} - \frac{yZ}{t}$ (Nr. 5. und 7.)

10. Ferner $CV = CQ + QV = CQ + ON$

$= \frac{2uw}{m} + \frac{sZ}{t}$ (Nr. 6 und 8).

11. Noch ist $RV^2 = \frac{c^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - CV^2)$ (§. 290. V. Zus.) also

$\frac{a^2}{c^2} RV^2 = \frac{1}{4}a^2 - CV^2$; die Werthe Nr. 9 und 10 substituirt,

$$\frac{a^2}{c^2}\left(\frac{4y^2w^2}{m^2} - \frac{4y^2wZ}{mt} + \frac{y^2Z^2}{t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}a^2 - \frac{4u^2w^2}{m^2} - \frac{4suwZ}{mt} - \frac{s^2Z^2}{t^2}; \text{ oder}$$

$$\frac{4a^2y^2w^2}{c^2m^2} - \frac{4a^2y^2wZ}{c^2mt} + \frac{a^2y^2Z^2}{c^2t^2}$$

$$= \frac{1}{4}a^2 - \frac{4u^2w^2}{m^2} - \frac{4suwZ}{mt} - \frac{s^2Z^2}{t^2}, \text{ also}$$

12. $$\left(\frac{a^2y^2}{c^2t^2} + \frac{s^2}{t^2}\right)Z^2 + \left(su - \frac{a^2y^2}{c^2}\right)\frac{4wZ}{mt}$$

$$+ \left(\frac{4a^2y^2}{c^2m^2} + \frac{4u^2}{m^2}\right)w^2 = \frac{1}{4}a^2$$

13. Nun ist $us = u. \frac{a^2 - 4u^2}{4u}$ (§. 293. I. Zus.)
$= \frac{1}{4} a^2 - u^2$.

14. Ferner $\frac{a^2}{c^2} y^2 = \frac{a^2}{c^2} \times \frac{c^2}{a^2} (\frac{1}{4} a^2 - u^2)$ (§. 290. V. Zus.) $= \frac{1}{4} a^2 - u^2$, folglich

15. $su - \frac{a^2 y^2}{c^2} = o$, mithin

16. $(\frac{a^2 y^2}{c^2 t^2} + \frac{s^2}{Z^2}) Z^2 + (\frac{4 a^2 y^2}{c^2 m^2} + \frac{4 u^2}{m^2}) w^2$
$= \frac{1}{4} a^2$ (Nr. 12.)

17. Um nun die beyden Coefficienten, welche für den gegebenen Punct M lauter beständige Größen enthalten, zu bestimmen, setze man erstern $= A$, den andern $= B$, oder:
$AZ^2 + Bw^2 = \frac{1}{4} a^2$.

18. Für $w = o$, das ist, wenn die Ordinate durch den Mittelpunct C der großen Axe geht, fällt RO mit IC zusammen, also $Z = \frac{1}{2} n$; folglich $A \frac{1}{4} n^2 = \frac{1}{4} a^2$; und daher
$A. = \frac{a^2}{n^2}$

19. Für $w = CM = \frac{1}{2} m$ hingegen ist RO, das ist $Z = o$, also $B \frac{1}{4} m^2 = \frac{1}{4} a^2$; also
$B = \frac{a^2}{m^2}$

20. Setzt man diese beyden Werthe in die Gleichung Nr. 16. oder Nr. 17., so ist:

$$\frac{a^2}{n^2} Z^2 + \frac{a^2}{m^2} w^2 = \frac{a^2}{4}, \text{ oder}$$

$$\frac{Z^2}{n^2} + \frac{w^2}{m^2} = \tfrac{1}{4}; \text{ und } \frac{Z^2}{n^2} = \tfrac{1}{4} - \frac{w^2}{m^2}, \text{ also}$$

$$21.\ Z^2 = n^2 \left(\tfrac{1}{4} - \frac{w^2}{m^2}\right) = \frac{n^2}{m^2} \left(\tfrac{1}{4} m^2 - w^2\right)$$

I. Zusatz: Da $Z = \pm \sqrt{\frac{n^2}{m^2} (\tfrac{1}{4} m^2 - w^2)}$ so entsprechen jeder Abscisse CO zwey gleiche Ordinaten OR, OS, die auf verschiedenen Seiten liegen, mithin halbirt die Abscissenlinie, oder Sehne MG die Ellipse, und ist also ein Diameter derselben (§. 255.)

II. Zusatz: Da sich für jede andere Sehne HI, welche ebenfalls durch den Mittelpunct C der großen Axe geht, eine ähnliche Gleichung construiren läßt, so ist jede Sehne, in welcher der Mittelpunct der großen Axe liegt ein Diameter der Ellipse.

III. Zusatz: Für w oder CO = o, wird $Z = \pm \tfrac{1}{2}$ n, das ist RO fällt mit IC, und OS mit CH zusammen, also IC = CH (I. Zus.), und IH wird vom Diameter MG im Mittelpuncte der großen Axe halbirt; mithin auch umgekehrt, wenn man HI zur Abscissenlinie nimmt, so wird von ihr MG ebenfalls halbirt, das ist, alle Durchmesser halbiren einander im Mittelpuncte der großen Axe.

§. 296.

§. 296.

Erklärung: (Fig. 97.)

Wenn man durch den einen Endespunct M, eines Diameters MG, eine Tangens der Ellipse, und mit dieser Tangens den Diameter IH parallel zieht, so heißen die beyden Diameter MG, IH **conjugirte Diameter** (Diametri conjugatae)

§. 297.

Lehrsatz: (Fig. 97.)

Die Summe der Quadrate der beyden conjugirten Diameter MG, IH, ist der Summe der Quadrate der beyden Axen gleich, oder wenn man MG = m; IH = n setzt, so ist $m^2 + n^2 = a^2 + c^2$.

Beweis:

1. Man ziehe nebst der Tangens MT, die beyden rechtwinklichten Ordinaten MP, HK auf die große Axe, und setze

2. CP = u; PM = y; CK = w; HK = Z; so ist

3. $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - u^2)$ (§. 290. V. Zus.), und

   $\frac{a^2}{c^2}y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$, folglich

4. $u^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2}y^2 = \frac{a^2}{c^2}(\frac{1}{4}c^2 - y^2)$.

5. $PT^2 = \frac{(\frac{1}{4} a^2 - u^2)^2}{u^2}$ (§. 293. I. Zus.)

6. $Z^2 = \frac{c^2}{a^2} (\frac{1}{4} a^2 - w^2)$. mithin ebenfalls

7. $w^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2}{c^2} Z^2 = \frac{a^2}{c^2} (\frac{1}{4} c^2 - Z^2)$.

8. Nun ist $\triangle MPT \backsim \triangle CKH$; denn $P = K = 90°$ und
$HCK = MTP$ (§. 45. II. Geom.) also

9. $PM : PT = HK : CK$, mithin auch
$PM^2 : PT^2 = HK^2 : CK^2$.

10. Substituirt man in letzterer Proportion die Werthe aus Nr, 3 — 7, so ist:

11. $\frac{c^2}{a^2}(\frac{1}{4} a^2 - u^2) : \frac{(\frac{1}{4} a^2 - u^2)^2}{u^2}$

$= Z^2 : \frac{a^2}{c^2} (\frac{1}{4} c^2 - Z^2)$, oder

$1 : \frac{\frac{1}{4} a^2 - u^2}{u^2} = Z^2 : \frac{1}{4} c^2 - Z^2$, also

$Z^2 (\frac{\frac{1}{4} a^2 - u^2}{u^2} + 1) = \frac{1}{4} c^2$, oder

$Z^2 (\frac{\frac{1}{4} a^2 - u^2 + u^2}{u^2}) = Z^2 . \frac{a^2}{4 u^2} = \frac{1}{4} c^2$,

also

12. $Z^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \times \frac{a^2}{c^2} (\frac{1}{4} c^2 - y^2)$ (Nr. 4.)

$= \frac{1}{4} c^2 - y^2$, folglich

13. $Z^2 + y^2 = \frac{1}{4} c^2$

14. Eben ist auch $\frac{c^2 u^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} (\frac{1}{4} a^2 - w^2)$
(Nr. 6 und 12.), also
$u^2 = \frac{1}{4} a^2 - w^2$, folglich

15. $u^2 + w^2 = \frac{1}{4} a^2$.

16. Endlich ist $CM = \frac{1}{2} MG$ (§. 295. III. Zus.) $= \frac{1}{2} m$;
und eben so $CH = \frac{1}{2} HI = \frac{1}{2} n$; mithin

17. $CP^2 + PM^2 = CM^2$, oder $u^2 + y^2 = \frac{1}{4} m^2$; und $CK^2 + HK^2 = CH^2$ oder $w^2 + Z^2 = \frac{1}{4} n^2$; folglich

18. $u^2 + w^2 + y^2 + Z^2 = \frac{1}{4} m^2 + \frac{1}{4} n^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} c^2$ (Nr. 13 und 15). und

19. $m^2 + n^2 = a^2 + c^2$.

§. 298.

Lehrsatz: (Fig. 97.)

Wenn wieder m und n die beyden conjugirten Diameter MG, IH, und q den eingeschlossenen Winkel MCH, ferner a die große, und c die kleine Axe der Ellipse bezeichnen, so ist $mn \sin. q = ac$.

Beweis:

1. Man ziehe die rechtwinklichten Ordinaten $MP = y$, $HK = Z$ auf die große Axe, setze noch $CP = u$; $CK = w$.

2. Ferner ziehe man für die Puncte M und H der Ellipse die Tangenten MT, HV, so ist wieder wie §. 297. Nr. 12.

3. $Z^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2}$; mithin $Z = \frac{cu}{a}$, und also

$uZ = \frac{cu^2}{a}$.

4. Ferner $\triangle HKV \sim \triangle MPC$, mithin
$HK^2 : KV^2 = PM^2 : CP^2$.

5. Nun ist: $HK^2 = Z^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^2 - w^2\right)$ (§. 290 V. Zus.);

$KV = \frac{a^2 - 4w^2}{4w}$ (§. 293. I. Zus.) $= \frac{\frac{1}{4}a^2 - w^2}{w}$

also $KV^2 = \frac{\left(\frac{1}{4}a^2 - w^2\right)^2}{w^2}$; $PM^2 = y^2$, CP^2

$= u^2 = \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)$ (§. 290. X. Zus.),

folglich

6. $\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^2 - w^2\right) : \frac{\left(\frac{1}{4}a^2 - w^2\right)^2}{w^2}$

$= y^2 : \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)$, oder

$1 : \frac{\frac{1}{4}a^2 - w^2}{w^2} = y^2 : \frac{1}{4}c^2 - y^2$, mithin

$y^2\left(1 + \frac{\frac{1}{4}a^2 - w^2}{w^2}\right) = \left(\frac{w^2 + \frac{1}{4}a^2 - w^2}{w^2}\right) y^2$

$= \frac{a^2}{4w^2}\, y^2 = \frac{1}{4}c^2$, also

w

$$w^2 = \frac{a^2 y^2}{c^2},\ w = \frac{a y}{c},$$ folglich

7. $$wy = \frac{ay^2}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{c^2}{a^2} \left(\tfrac{1}{4} a^2 - u^2\right)$$

$$= \frac{c}{a} \left(\tfrac{1}{4} a^2 - u^2\right)$$

$$= \frac{ac}{4} - \frac{cu^2}{a}.$$

8. Nun ziehe man noch die geraden Linien MH, MK, so ist

9. $\triangle MKP = \tfrac{1}{2} MP\,(CP + CK) = \tfrac{1}{2}\,uy + \tfrac{1}{2}\,wy$
$\triangle MCP = \tfrac{1}{2} MP.\ CP = \tfrac{1}{2}\,uy$
$\triangle MHK = \tfrac{1}{2} HK\,(CP + CK) = \tfrac{1}{2}\,uZ + \tfrac{1}{2}\,wZ$
$\triangle HCK = \tfrac{1}{2} HK\ \ CK = \tfrac{1}{2}\,wZ$; mithin

10. $\triangle MCH = \triangle MKP + \triangle HMK - \triangle MCP$
$- \triangle HCK$
$= \tfrac{1}{2}\,wy + \tfrac{1}{2}\,uZ$
$= \tfrac{1}{2}.\ \frac{ac}{4} - \tfrac{1}{2}.\ \frac{cu^2}{a} + \tfrac{1}{2}.\ \frac{cu^2}{a}$ (Nr. 3 und 7)
$= \tfrac{1}{8}\,ac.$

11. Ferner ist $\triangle MCH = \tfrac{1}{2}$ CM. CH sin. q (§. 34)
$= \tfrac{1}{8}$ mn sin. q., folglich

12. $\tfrac{1}{8}$ mn sin. q $= \tfrac{1}{8}$ ac, und also auch
mn sin. q = a c.

§. 299.

Aufgabe:

Aus zweyen conjugirten Diametern m, n nebst ihrem eingeschlossenen Winkel q, die beyden Axen a, c der Ellipse zu suchen.

Auf-

Auflösung:

1. $a^2 + c^2 = m^2 + n^2$ (§. 297.)
   $ac = mn \sin. q$ (§. 298.) mithin

2. $a^2 + 2ac + c^2 = m^2 + 2\,mn \sin. q + n^2$, und
   $a^2 - 2ac + c^2 = m^2 - 2\,mn \sin. q + n^2$, mithin

3. $a + c = \sqrt{(m^2 + 2mn \sin. q + n^2)}$, und
   $a - c = \sqrt{(m^2 - 2mn \sin. q. + n^2)}$, folglich aus §. 86 Arithm.

4. $a = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + 2\,mn \sin. q + n^2)} + \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 2\,mn \sin. q + n^2)}$, und
   $c = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + 2\,mn \sin. q + n^2)} - \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - 2\,mn \sin. q + n^2)}$.

Zusatz: Wenn von den 5 Größen, nemlich den beyden Axen a, c, den beyden conjugirten Diametern m, n und ihrem eingeschlossenen Winkel q, drey Stücke gegeben sind, so lassen sich allemal die beyden übrigen aus den beyden Gleichungen Nr. 1 bestimmen. (§. 167. III. Zus. Arithm.)

§. 300.

Aufgabe: (Fig. 85.)

Aus dem Parameter p, für die Abscisse x oder den Punct M der Ellipse ihren Krümmungshalbmesser MC zu suchen.

Auflösung:

1. Für jede krumme Linie ist:

M

$MC = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2 y}$, wenn man dx als eine unveränderliche Größe annimmt (§. 264. I. Zus.).

2. Für die Ellipse ist aber aus §. 287

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a}, \text{ also } y = (px - \frac{px^2}{a})^{\frac{1}{2}},$$

und

3. $dy = \frac{1}{2}(px - \frac{px^2}{a})^{-\frac{1}{2}}(pdx - \frac{2pxdx}{a})$ (§. 307. Arithm.)

$$= (\tfrac{1}{2}p - \frac{px}{a})\, dx\, (px - \frac{px^2}{a})^{-\frac{1}{2}}, \text{ also}$$

4. $dy^2 = (\frac{1}{4}p^2 - \frac{p^2 x}{a} + \frac{p^2 x^2}{a^2})\, dx^2\, (px - \frac{px^2}{a})^{-1}$

$$= \frac{a^2 p^2 - 4ap^2 x + 4p^2 x^2}{4a^2 (px - \frac{px^2}{a})} dx^2, \text{ und}$$

5. $dx^2 + dy^2 = (1 + \frac{a^2 p^2 - 4ap^2 x + 4p^2 x^2}{4a^2 (px - \frac{px^2}{a})})\, dx^2$

$$= \frac{4a^2 px - 4apx^2 + a^2 p^2 - 4ap^2 x + 4p^2 x^2}{4a^2 (px - \frac{px^2}{a})} dx^2$$

6. $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{(4a^2px - 4apx^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{8a^3\left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} dx^3$$

7. Differentiirt man Nr. 3 nochmal nach §. 312. b. und 313 Arithm. so wird, wenn man dx als unveränderlich setzt

$$d^2y = -\frac{p}{a}dx^2\left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p - \frac{px}{a}\right)\left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{-\frac{3}{2}} dx\left(pdx - \frac{2pxdx}{a}\right)$$

$$= -\frac{p}{a}dx^2\left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{4}p^2 - \frac{p^2x}{2a} - \frac{p^2x}{2a} + \frac{p^2x^2}{a^2}\right)dx^2\left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

8. Nun ist aber:

$$\left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(px - \frac{px^2}{a}\right)\left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{-\frac{3}{2}},$$

mithin in der vorigen Gleichung substituirt, giebt

9. $$d^2y = \left[-\frac{p^2x}{a} + \frac{p^2x^2}{a^2} - \frac{1}{4}p^2 + \frac{p^2x}{a} - \frac{p^2x^2}{a^2}\right]dx^2\left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}p^2dx^2\left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{-\frac{3}{2}},$$ folglich

10.

10. $dxd^2y = -\frac{1}{4} p^2 dx^3 \left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{-\frac{3}{2}}$; mithin endlich (Nr. 1) der Krümmungshalbmesser der Ellipse für den Punct M, oder

11. $MC =$

$$-\frac{(4a^2px - 4apx^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2)^{\frac{3}{2}} dx^3}{8a^3 \left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\times - \frac{4\left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2 dx^3}$$

$$= \frac{(4a^2px - 4apx^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2}$$

Da nun letztere Gleichung keine Hilfsgröße mehr enthält, so ist sie eine vollständige Gleichung.

I. Zusatz: Am Scheitel, wo $x = 0$ ist, wird

$$MC = \frac{(a^2p^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2} = \frac{a^3p^3}{2a^3p^2} = \frac{1}{2}p$$ wie bey der Parabel (§. 281. II. Zus.).

II. Zusatz: Für $x = \frac{1}{2}a$ ist

$$MC = \frac{(2a^3p - a^3p + a^2p^2 - 2a^2p^2 + a^2p^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2}$$

$$= \frac{(a^3p)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2} = \frac{a^3p\sqrt{a^3p}}{2a^3p^2} = \frac{\sqrt{a^3p}}{2p}$$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{2}a.\frac{a}{\sqrt{ap}} = \frac{1}{2}a.\frac{a}{c}$$ (§. 290 I Zus.) mithin ist für $= \frac{1}{2}a$, $MC : \frac{1}{2}a = a : c$.

III. Zusatz: Vermög Nr. 5 ist:

$$dx^2 + dy^2$$

$$= \frac{4a^2px - 4apx^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2}{8a^3\left(px - \frac{px^2}{a}\right)}$$

also (Fig. 93) die Länge des elliptischen Bogens AM nach §. 267.

$$= \int \left(\frac{4a^2px - 4apx^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + p^2x^2}{8a^3\left(px - \frac{px^2}{a}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

Wo aber die Integration durch Auflösung in eine Reihe nach §. 336 Arithm. geschehen muß.

§. 301.

Aufgabe: (Fig. 93)

Das zwischen den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM und dem Bogen AM enthaltene Stück AMP der Ellipse zu quadriren.

Auflösung:

1. Allgemein ist die von rechtwinklichten Coordinaten und einem Bogen begränzte Ebene oder $R = \int y dx$ (§. 268).

2. Nun ist für die Ellipse:

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a} \text{ (§. 287.)} = \frac{apx - px^2}{a}$$

$$= \frac{p}{a}(ax - x^2)$$

$y = p^{\frac{1}{2}}\ a^{-\frac{1}{2}}\ (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$, folglich

3. $y dx = p^{\frac{1}{2}}\ a^{-\frac{1}{2}}\ dx\ (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$, und folglich

4. $AMP = \int p^{\frac{1}{2}}\ a^{-\frac{1}{2}}\ dx\ (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

5. Dieses Integral läßt sich nun aus den Integralformeln der VI. Tabelle Nr. 28 §. 252. bestimmen; Denn wenn man in dieser Tabelle $b = p^{\frac{1}{2}}\ a^{-\frac{1}{2}}$; und $c = a$ setzt, so wird

6. $\int p^{\frac{1}{2}}\ a^{-\frac{1}{2}}\ dx\ (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= \tfrac{1}{8}\ p^{\frac{1}{2}}\ a^{-\frac{1}{2}}\ a^2 . \text{arc. cos.} \left(1 - \frac{2x}{a}\right)$$

$$- \tfrac{1}{8}\ p^{\frac{1}{2}}\ a^{-\frac{1}{2}} (2a - 4x) \sqrt{(ax - x^2)} + C.$$

$$= \tfrac{1}{8}\ p^{\frac{1}{2}}\ a^{\frac{3}{2}}\ .\ \text{arc. cos.} \left(1 - \frac{2x}{a}\right)$$

$$- \tfrac{1}{8}\ p^{\frac{1}{2}}\ a^{-\frac{1}{2}}\ (2a - 4x) \sqrt{(ax - x^2)} + C$$

7. Für $x = 0$ wird nun auch die Fläche $AMP = 0$; mithin $0 = \frac{1}{8}\ p^{\frac{1}{2}}\ a^{\frac{3}{2}}$ arc. cos. $1 + C$; nun gehört aber zum Cosinus 1, das ist, zu einem Cosinus, welcher dem positiven Halbmesser 1 gleich ist, ein Bogen $= 0$ (§. 296 III. Zus.) Trig.) oder arc. cos. $1 = 0$; folglich ist auch $C = 0$, mithin

8. $$APM = \tfrac{1}{8}\ p^{\frac{1}{2}}\ a^{\frac{3}{2}}\ \text{arc. cos.} \left(1 - \frac{2x}{a}\right)$$

$$- \tfrac{1}{8}\ p^{\frac{1}{2}}\ a^{-\frac{1}{2}}\ (2a - 4x) \sqrt{(ax - x^2)}$$

I. Zusatz: Setzt man die halbe Peripherie des Kreises für den Radius $1 = \pi$ (§. 127. Geom.), so ist für $x = a$ die halbe Ellipse $ADB = \frac{1}{8} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$ arc. cos. $- 1$.

Nun ist aber arc. cos. $- 1 = \pi$ (§. 296. III. und IV. Zus. Trig.) mithin

$ADB = \frac{1}{8} a \sqrt{ap} \times \pi = \frac{1}{8} ac \pi$ (§. 290. I. Zus.).

II. Zusatz. Die Quadratur der Ellipse hängt von jener des Kreises ab.

§. 302.

Aufgabe: (Fig. 93.)

Die Oberfläche des elliptischen Sphäroids, welches der unbestimmte Bogen DM der Ellipse durch Umdrehung um die große Axe beschreibt, zu bestimmen.

Auflösung:

1. Wenn man die Abscissen auf der großen Axe vom Mittelpuncte C aus bestimmt, so ist $u = \frac{1}{2} a - x$; mithin $du = - dx$, und $du^2 = dx^2$

2. Die Oberfläche jedes Sphäroids einer krummen Linie, oder

$$Q = \int 2 \pi y \, (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (§. 270. II.)},$$

$$= \int 2 \pi y \, (du^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (Nr. 1.)}$$

3.

3. Nun ist für die Ellipse aus §. 290. V. Zus.

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2} (\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)\text{; mithin}$$

4. $$y = \frac{c}{a} (\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}\text{, und}$$

5. $$dy = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{c}{a} (\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} (-2\,udu)$$

$$= -\frac{cudu}{a\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2)}}\text{, also}$$

$$dy^2 = \frac{c^2 u^2 du^2}{a^2 (\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)}\text{, und}$$

$$du^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{c^2 u^2}{a^2 (\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)}\right) du^2$$

$$= \frac{\tfrac{1}{4} a^4 - a^2 u^2 + c^2 u^2}{a^2 (\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)} du^2$$

mithin

6. $$2\pi y (du^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi c}{a} (\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \frac{(a^4 - 4 a^2 u^2 + 4 c^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}{2a (\tfrac{1}{4} a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} du\text{, oder}$$

$$dQ = \frac{c\pi du}{a^2} (a^4 - 4 (a^2 - c^2) u^2)^{\frac{1}{2}}$$

7. Nun ist $e = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)}$ (§. 290, VI. Zus.) mithin

$e^2 = \frac{1}{4} (a^2 - c^2)$, und $16\,e^2 = 4 (a^2 - c^2)$. folglich substituirt,

8.

8. $Q = \int \frac{c\pi du}{a^2} (a^4 - 16 e^2 u^2)^{\frac{1}{2}} + C$

$= \int \frac{4 ce\pi du}{a^2} (\frac{a^4}{16 e^2} - u^2)^{\frac{1}{2}} + C$

9. Dieses Differential läßt sich nun vermög der VI. Tabelle Nr. 26. §. 252. integriren, es wird nemlich

10. $Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{16 e^2} \cdot \frac{4 ce\pi}{a^2} \cdot \text{arc. sin.} \frac{u . 4 e}{a^2}$

$+ \frac{2 ce\pi u}{a^2} \sqrt{(\frac{a^4}{16 e^2} - u^2)} + C$

$= \frac{a^2 c\pi}{8 e} \cdot \text{arc. sin.} \frac{4 eu}{a^2}$

$+ \frac{2 ce\pi u}{a^2} \sqrt{(\frac{a^4}{16 e^2} - u^2)} + C$

11. Setzt man nun die Abscisse $u = o$, so wird die ganze Gleichung, mithin auch $C = o$, folglich für den Bogen DM

12. $Q = \frac{a^2 c\pi}{8 e} \cdot \text{arc. sin.} \frac{4 eu}{a^2}$

$+ \frac{2 ce\pi u}{a^2} \sqrt{(\frac{a^4}{16 e^2} - u^2)}$

I. Zusatz: Für $u = \frac{1}{2}$ a wird

$Q = \frac{a^2 c\pi}{8 e} \text{arc. sin.} \frac{2 e}{a}$

$+ \frac{ce\pi}{a} \sqrt{(\frac{a^4}{4 (a^2 - c^2)} - \frac{1}{4} a^2)}$

=

$$= \frac{a^2 c\pi}{8e} \text{ arc. sin. } \frac{2e}{a}$$

$$+ \frac{ce\pi}{a} \sqrt{\left(\frac{a^4 - a^4 + a^2 c^2}{4(a^2 - c^2)}\right)}$$

Nun ist $4(a^2 - c^2) = 16\, e^2$, mithin $\sqrt{(4(a^2 - c^2))} = 4\, e$, folglich

$$Q = \frac{a^2 c\pi}{8e} \text{ arc. sin. } \frac{2e}{a} + \frac{ce\pi}{a} \cdot \frac{ac}{4e}$$

$$= \frac{a^2 c\pi}{8e} \text{ arc. sin. } \frac{2e}{a} + \tfrac{1}{4} c^2 \pi$$

welches also die Oberfläche vom halben Sphäroid der Ellipse ist, mithin

II. Zusatz: Für die ganze Ellipse, wenn sich solche um die große Axe drehet, ist die Oberfläche

$$2\,Q = \frac{a^2 c\pi}{4e} \text{ arc. sin. } \frac{2e}{a} + \tfrac{1}{2} c^2 \pi$$

III. Zusatz: Je kleiner nun $e = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)}$ ist, desto kleiner ist auch $\frac{2e}{a}$, mithin desto näher kömmt der Sinus seinem Bogen, so, daß also arc. sin. $\frac{2e}{a} = \frac{2e}{a}$ eine unvollständige Gleichung ist, mithin auch

$$2Q = \frac{a^2 c\pi}{4e} \cdot \frac{2e}{a} + \tfrac{1}{2} c^2 \pi$$

$= \frac{1}{2} ac\pi + \frac{1}{2} c^2\pi$; erst an der Gränze, wenn e unendlich klein, oder als eine verschwindende

Grö-

Größe betrachtet wird, mithin $a = c$ ist, so geht sie in nachstehende vollkommene über: $2Q = \frac{1}{2} a^2 \pi + \frac{1}{2} a^2 \pi = a^2 \pi = 4 r^2 \pi$, wenn man $a = 2r$ setzt, oder das elliptische Sphäroid wird eine Kugel (§. 272. II. Zus. Geom.)

§. 303.

Aufgabe: (Fig. 93.)

Wenn $a = 1718{,}874$, und $c = \frac{230}{231} a$ gegeben ist, die Oberfläche des Sphäroids zu bestimmen, welches entsteht, wenn sich die halbe Ellipse um die große Axe AB $= a$ dreht.

Auflösung:

1. $2Q = \frac{a^2 c \pi}{4e}$ arc. sin. $\frac{2e}{a} + \frac{1}{2} c^2 \pi$ (§. 302. II. Zus.)

2. Nun ist $a^2 c \pi = a^2 . \frac{230}{231} a \pi = \frac{230 a^3 \pi}{231}$

Ferner ist $e = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - \frac{230^2}{231^2} a^2)}$

$$= \frac{1}{2} a \sqrt{\left(\frac{231^2 - 230^2}{231^2}\right)}$$

mithin $4e = 2a \frac{\sqrt{(231^2 - 230^2)}}{231} = \frac{2a\sqrt{461}}{231}$,

also:

3. $\frac{a^2 c\pi}{4e} = \frac{230 a^3 \pi}{231} \times \frac{231}{2a\sqrt{461}}$

$= \frac{230 a^2\pi}{2\sqrt{461}} = \frac{115 a^2\pi}{\sqrt{461}}$

4. $\frac{2e}{a} = \frac{a\sqrt{461}}{231} : a = \frac{\sqrt{461}}{231}$

5. $\frac{1}{2} c^2\pi = \frac{1}{2}. \frac{230^2}{231^2} a^2\pi$, folglich die ganze Oberfläche, oder:

6. $2Q = \frac{115 a^2\pi}{\sqrt{461}} \text{arc. sin.} \frac{\sqrt{461}}{231} + \frac{230^2 a^2\pi}{2.\ 231^2}$

7. Nun ist

log. a = 3,2352439	log. 461 = 2,6637009
2 = 2	2 = 2
log. a^2 = 6,4704878	log. $\sqrt{461}$ = 1,3318504
log. 115 = 2,0606978	
log. π = 0,4971499	

log. $115a^2\pi$ = 9,0283355
log. $\sqrt{461}$. = 1,3318504

8. $\log. \frac{115a^2\pi}{\sqrt{461}} = 7{,}6964851.$

9. $\frac{\sqrt{461}}{231} = \frac{21{,}4709105}{231} = 0{,}0929477$

10. Schlägt man diese Zahl unter den Sinussen für den Halbmesser 1 auf, so entspricht sie dem Sinus von 5° 20′ beynahe.

11. Nun ist für eben den Halbmesser 1

$$\begin{aligned} \text{arc. } 5^\circ &= 0{,}0872665 \\ \text{arc. } 20' &= 0{,}0058177 \text{ also} \\ \hline \text{arc. } 50^\circ,\ 20' &= 0{,}0930842, \text{ mithin} \end{aligned}$$

12. $\log.\ \text{arc. sin.}\ \frac{\sqrt{461}}{231} = 5{,}9688759 - 7$ (§. 246. Arithm.)

$$\log.\ \frac{115\, a^2 \pi}{\sqrt{461}} = 7{,}6964851 \text{ (Nr. 8.)}$$

$$6{,}6653610;\ \text{folglich}$$

13. $\frac{115\, a^2 \pi}{\sqrt{461}}\ \text{arc. sin.}\ \frac{\sqrt{461}}{231} = 4627656.$

14. Ferner Nr. 6.

log. 230 = 2,3617278	log. 231 = 2,3636120
log. a = 3,2352439	2 = 2
log. 230 a = 5,5969717	log. 231^2 = 4,7272240
2 = 2	log. 2 = 0,3010300
log. $230^2\, a^2$ = 11,1939434	log. 2.231^2 = 5,0282540

$$\begin{aligned} \log.\ \pi &= 0{,}4971499 \\ \hline & 11{,}6910933 \\ \text{l. } 2.\,231^2 &= 5{,}0282540 \\ \hline & 6{,}6628393,\ \text{mithin} \end{aligned}$$

$$15.\quad \frac{230^2 a^2 \pi}{2.\,231^2} = 4600863$$

$$\frac{115\, a^2 \pi}{\sqrt{461}} \text{ arc. sin. } \frac{\sqrt{461}}{231} = 4627656 \text{ (Nr.13.)}$$

$$\text{Folglich } 2\,Q = 9228519 \text{ (Nr. 6.)}$$

Anmerkung: Die Bestimmungen für a und c sind aus Kästners Anfangsgründen der Anal. des Unendl. 3. Ausg. Seite 706 genommen, wo a den Diameter des Aequators, und c die Erdaxe folglich 2 Q die Oberfläche der Erde in geographischen Meilen angiebt.

§. 304.

Aufgabe: (Fig. 93.)

Die Oberfläche des Sphäroides, welches der Bogen AM der Ellipse durch Umdrehnng um die kleine Axe DE beschreibt, zu finden.

Auflösung:

1. Nimmt man DE zur Abscissenlinie, und den Mittelpunct C zu ihrem Anfangspunct, so ist

2. $u^2 = \frac{a^2}{c^2}(\frac{1}{4}c^2 - y^2)$ (§. 290. X. Zus.); ferner ist nun

3. $Q = \int 2\pi u\,(du^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 270. II.) und

4. $u = \frac{a}{c}(\frac{1}{4}c^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$, ferner

5. $du = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{c} \left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}} (-2ydy)$

$= -\frac{aydy}{c\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, und

$du^2 = \frac{a^2y^2dy^2}{c^2\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)}$, mithin

$dy^2 + du^2 = \left(1 + \frac{a^2y^2}{c^2\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)}\right) dy^2$

$= \frac{c^4 - 4c^2y^2 + 4a^2y^2}{4c^2\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)} dy^2$, und

6. $(dy^2 + du^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(c^4 + 4(a^2 - c^2)y^2)^{\frac{1}{2}}}{2c\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}} dy$

7. Setzt man nun die Werthe von Nr. 4 und 6 in die Gleichung Nr. 3, so ist für die Ellipse

8. $Q = \int \frac{2a\pi}{c} \left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\times \frac{(c^4 + 4(a^2 - c^2)y^2)^{\frac{1}{2}}}{2c\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}} dy + C$, oder

$Q = \int \frac{a\pi}{c^2} dy (c^4 + 4(a^2 - c_2)y^2)^{\frac{1}{2}} + C$

9. Nun ist wieder $e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$ (§. 290. VI. Zus.) mithin $16e^2 = 4(a^2 - c^2)$, dieses in vorgehender Gleichung substituirt, giebt

10. $Q = \int \frac{a\pi}{c^2} dy\, (c^4 + 16\, e^2 y^2)^{\frac{1}{2}} + C$

$= \int \frac{4 ae\pi}{c^2} dy \left(\frac{c^4}{16\, e^2} + y^2\right)^{\frac{1}{2}} + C$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4 ae\pi y}{c^2} \sqrt{\left(\frac{c^4}{16\, e^2} + y^2\right)}$

$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{c^4}{16\, e^2} \cdot \frac{4 ae\pi}{c^2}$ log. nat. $\left[y + \sqrt{\left(\frac{c^4}{16\, e^2}\right.}\right.$

$\left.\left. + y^2\right)\right] + C$ (VI. Tabelle Nr. 6. §. 252.)

$= \frac{2 ae\pi y}{c^2} \cdot \frac{\sqrt{(c^4 + 16\, e^2\, y^2)}}{4\, e}$

$+ \frac{ac^2\pi}{8\, e}$ log. nat. $\left[y + \frac{\sqrt{(c^4 + 16\, e^2 y^2)}}{4\, e}\right] + C$

11. Für $y = o$, ist nun auch $Q = o$, mithin

$o = \frac{a c^2 \pi}{8\, e}$ log. nat. $\frac{c^2}{4\, e} + C$, also

$C = - \frac{ac^2\pi}{8\, e}$ log. nat. $\frac{c^2}{4\, e}$, folglich

12. $Q = \frac{a\pi y}{2\, c^2} \sqrt{(c^4 + 16 e^2\, y^2)}$

$+ \frac{ac^2\pi}{8\, e}$ log. nat. $\left[\frac{4\, e}{c^2} \cdot \left(y + \frac{\sqrt{(c^4 + 16 e^2 y^2)}}{4 e}\right)\right]$

13. Setzt man wieder für $16\; e^2$ dessen Werth $4\, (a^2 - c^2)$ (Nr. 9.), so ist

$$14.\quad Q = \frac{a\pi y}{2c^2} \sqrt{(c^4 + 4a^2y^2 - 4c^2y^2)}$$

$$+ \frac{ac^2\pi}{8e} \text{ log. nat. } \left[\frac{4cy}{c^2} + \frac{\sqrt{(c^4 + 4a^2y^2 - 4c^2y^2)}}{c^2}\right]$$

I. Zusatz: Für $y = \frac{1}{2}c$, wird die Oberfläche des halben elliptischen Sphäroids, welche durch das Umdrehen um die kleine Axe entsteht, oder

$$Q = \frac{ac\pi}{4c^2} \sqrt{(c^4 + a^2c^2 - c^4)}$$

$$+ \frac{ac^2\pi}{8e} \text{ log. nat. } \left[\frac{2e}{c} + \frac{\sqrt{(c^4 + a^2c^2 - c^4)}}{c^2}\right]$$

$$= \frac{a^2\pi}{4} + \frac{ac^2\pi}{8e} \text{ log. nat. } \frac{2e + a}{c}$$

II. Zusatz: Die Oberfläche des ganzen elliptischen Sphäroids, für die kleine Axe, oder

$$2Q = \frac{1}{2}a^2\pi + \frac{ac^2\pi}{4e} \text{ log. nat. } \frac{2e + a}{c}$$

III. Zusatz: Nimmt man c, mithin auch e als eine veränderliche Größe, so wird e um so kleiner, je weniger c von a verschieden ist, und $\frac{2e + a}{c}$ $= \frac{2e}{c} + 1$, so wie log. nat. $\frac{2e}{c} = \frac{2e}{c}$ (§. 236. I. Zus. Arithm.), folglich auch $2Q = \frac{1}{2}a^2\pi$ $+ \frac{ac^2\pi}{4e} \cdot \frac{2e}{a} = \frac{1}{2}a^2\pi + \frac{1}{2}c^2\pi$ sind un-

vollständige Gleichungen, an der Gränze von c aber, das ist, wenn die veränderliche, also Hilfsgröße c ihrer Hauptgröße a gleich, also die Ellipse zum Kreis wird, so ist für letztere $2Q = \frac{1}{2} a^2 \pi + \frac{1}{2} a^2 \pi = a^2 \pi = 4 r^2 \pi$ eine vollständige Gleichung.

§. 305.

Aufgabe: (Fig. 93.)

Wenn von der Erde der Diameter des Aequators, oder $a = \frac{5400}{\pi} = 1718{,}874$ geograph. Meilen, und $c = \frac{230}{231} a$ gegeben ist, deren Oberfläche in geographischen Quadratmeilen zu bestimmen, wenn die Erde als ein elliptisches Sphäroid genommen wird, welches durch Umdrehung der Ellipse um die kleine Axe erzeugt wird.

Auflösung:

1. $2Q = \frac{1}{2} a^2 \pi + \frac{ac^2\pi}{4e} \text{ log. nat. } \frac{2e + a}{c}$ (§. 304 II. Zus.)

2. Nun ist $ac^2\pi = a \frac{230^2}{231^2} a^2\pi = \frac{230^2 a^3\pi}{231^2}$

$4e = \frac{2a\sqrt{461}}{231}$, mithin

3. $\frac{ac^2\pi}{4e} + \frac{230^2\, a^3\pi}{231^2} \times \frac{231}{2a\sqrt{461}} = \frac{230^2\, a^2\pi}{462\sqrt{461}}$

4. $2e + a = \frac{a\sqrt{461}}{231} + a = \frac{a(231 + \sqrt{461})}{231}$,

also

5. $\frac{2e+a}{c} = \frac{a(231 + \sqrt{461})}{231} \times \frac{231}{230.\, a}$

$= \frac{231 + \sqrt{461}}{230} = \frac{231 + 21{,}4709}{230} = 1{,}0977$;

folglich

6. $2Q = \frac{1}{2} a^2 \pi + \frac{230^2\, a^2 \pi}{462\sqrt{461}}$ log. nat. 1,0977

7. Nun ist log. a = 3,2352439

$$\begin{array}{rl} \text{log. } a = & 3{,}2352439 \\ 2 = & 2 \\ \hline \text{log, } a^2 = & 6{,}4704878 \\ \text{log. } \pi = & 0{,}4971499 \\ \text{c. d. log. } 2 = & 9{,}6989700 - 10 \\ \hline & 6{,}6666077 \end{array}$$

, folglich

8. $\frac{1}{2} a^2 \pi = 4640960$

9. Nun bestimme man, im Falle man Tabellen für die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen an der Hand hat, log. nat. 1,0977 auf die nemliche Art wie §. 244. Arithm.; es ist nemlich aus Wolframs Tabellen:

$$\begin{array}{rl} \text{log. nat. } 1098 = & 7{,}0012456 \\ \text{log. nat. } 1097 = & 7{,}0003345 \\ \hline & 9111 \end{array}$$

, mithin

10.

$10 : 7 = 9111 : x.$ und $x = 6378$, also

log. nat. 1097,7 = 7,0009723,

Ferner log. nat. 1000 = 6,9077553, folglich

$$\text{log. nat.}\ \frac{1097,7}{1000} = 0,0932170 = \text{log. nat. } 1,0977$$

10. Wenn man keine Tabellen von natürlichen Logarithmen besitzt, so verwandelt man die gemeinen in natürliche (§. 241, Arithm.). Es ist nemlich:

$$\begin{aligned}\text{log. nat. } 1,0977 &= 2,3025850 \text{ log. vulg. } 1,0977\\ &= 2,3025850 \times 0,0404837\\ &= 0,0932172\end{aligned}$$

11. Ferner

log. 230 = 2,3617278	log. 461 = 2,6637009
log. a = 3,2352439	2 = 2
log. 230. a. = 5,5969717	log. $\sqrt{461}$
2 = 2	= 1,3318504

$$\begin{aligned}\text{log. } 230^2 a^2 &= 11,1939434\\ \text{log. } \pi &= 0,4971499\\ \text{log. } 0,093217 &= 4,9694951 - 6\\ \text{c. d. log. } 462 &= 7,3353580 - 10\\ \text{c. d. log. } \sqrt{461} &= 8,6681496 - 10\end{aligned}$$

6,6640960, also Nr. 6.

12. $\frac{230^2 a^2 \pi}{462\sqrt{461}}$ log. nat. $1,0977 = 4614195$

$\frac{1}{2} a^2 \pi = 4640960$ (Nr. 8.)

Folglich Nr. 6. 2 Q = 9255155 □ Meilen.

 §. 306.

§. 306.

Aufgabe: (Fig. 93.)

Den Theil K des elliptischen Sphäroids zu cubiren, welchen die Fläche CPMD beschreibt, wenn sie sich um die große Axe AB dreht.

Auflösung:

1. Für die Abscissen vom Mittelpuncte an gerechnet, wird allgemein $K = \int \pi y^2 du$ (§. 270. I.)

2. Ferner ist $y^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2}$, mithin

$$\pi y^2 du = \left(\frac{1}{4} c^2 du - \frac{c^2 u^2 du}{a^2}\right) \pi$$ folglich

für die Ellipse

3. $K = \left(\frac{1}{4} c^2 u - \frac{c^2 u^3}{3 a^2}\right) \pi$

4. Da nun für $u = 0$, die ganze vorhergehende Gleichung $= 0$ wird, so darf keine beständige Größe beygesetzt werden.

I. Zusatz: Für $u = \frac{1}{2} a$, wird das halbe elliptische Sphäroid.

$$K = \frac{1}{8} \pi c^2 a - \frac{c^2 a^3}{24 a^2} \pi = \frac{1}{8} a c^2 \pi \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$= \frac{1}{12} a c^2 \pi$; mithin das Ganze, oder

$2 K = \frac{1}{6} a c^2 \pi$.

II. Zusatz: Wird $c = a$, also das Sphäroid zur Kugel, so ist $2 K = \frac{1}{6} a^3 \pi$, oder wenn man

$a = d = 2r$ setzt, $2K = \frac{1}{6} d^3 \pi = \frac{4}{3} r^3 \pi$ (§. 273. Geom.)

III. Zusatz: Will man das Stück des elliptischen Sphäroids bestimmen, welches die Fläche AMmC beschreibt, wenn sie sich um die kleine Axe DE dreht, so ist nun

$K = \int \pi u^2 dy$ (§. 270 I.); und $u^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2}$ (§. 290. X. Zus.), mithin

$$\pi u^2 dy = \pi \left(\frac{1}{4} a^2 dy - \frac{a^2 y^2}{c^2} dy\right), \text{ folglich}$$

$$K = \frac{1}{4} a^2 y \pi - \frac{a^2 y^3 \pi}{3 c^2}; \text{ wo wieder } C = 0 \text{ ist}$$

IV. Zusatz: Setzt man im vorhergehenden Zusatz $y = \frac{1}{2} c$, so ist das halbe elliptische Sphäroid für die kleine Axe

$$K = \frac{1}{8} a^2 c \pi - \frac{a^2 c^3 \pi}{24 c^2} = \frac{1}{8} a^2 c \pi \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$= \frac{1}{12} a^2 c \pi$, folglich das ganze Sphäroid für die kleine Axe, oder

$$2K = \frac{1}{6} a^2 c \pi.$$

Setzt man endlich $c = a = d = 2r$, so ist die Kugel

$$2K = \frac{1}{6} a^3 \pi = \frac{1}{6} d^3 \pi = \frac{4}{3} r^3 \pi \text{ wie II. Zus.}$$

V Zusatz: Wenn man das Sphäroid im I. Zus. $= s$, und folglich jenes vom IV. Zus. $= S$, so ist $S : s = \frac{a^2 c \pi}{6} : \frac{a c^2 \pi}{6} = a : c$

VI.

VI. Zusatz: Da $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, so ist auch;

$$K = \int(\pi\, y^2 dx) = \int \pi\, (pxdx - \frac{px^2dx}{a})$$

$$= \pi\, (\tfrac{1}{2}px^2 - \frac{px^3}{3a}) = \pi\, (\frac{3apx^2 - 2px^3}{6a})$$

$$= \frac{\pi px^2}{6a}(3a - 2x)$$, wenn sich die Fläche AMP um die große Axe dreht.

IV. Abschnitt.

Von der Hyperbel.

§. 307.

Lehrsatz: (Fig. 88.)

Wenn man AB = a (§. 272. III. Zus.) zur Abscissenlinie, und A zum Anfangspunct der Abscissen nimmt, ferner den Parameter = p, und die einem beliebigen Punct M der Hyperbel entsprechenden Coordinaten x, y setzt, so ist für die Hyperbel allgemein:

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

Beweis:

1. Man lege durch M eine Ebene zur Grundfläche des Kegels parallel, so ist wieder alles wie §. 274. Nr. 1 — 5, also

2. $PM^2 = RP.\ PN.$

3. Durch A ziehe man im Axentriangel des untern Kegels, und eben so durch B im Axentriangel des obern Kegels zu NR die Parallelen AG. BL, so ist

4. $\triangle APN \backsim \triangle ABL$, mithin
$AB : BL = AP : PN$, folglich

5. $PN = \frac{BL.\ AP}{AB}$

6. Ferner $\triangle ABG \backsim \triangle PBR$, mithin
$AB : AG = BP : RP$, folglich

7. $RP = \frac{AG.\ BP}{AB}$.

8. Setzt man nun die Werthe Nr. 5 und 7. in die Gleichung Nr. 2, so ist

9. $PM^2 = \frac{AG.\ BP}{AB} \cdot \frac{BL.\ AP}{AB}$

$$= \frac{AG.\ BL}{AB} \cdot \frac{AP.\ BP}{AB}$$

10. Man mag nun den Punct M in der Hyperbel, wo man will, annehmen, so bleibt $\frac{AG.\ BL}{AB}$ unveränderlich, und ist also der Parameter p;

11. Ferner ist $BP = AB + AP = a + x$; folglich diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung substituirt, giebt

$$12.\ y^2 = p.\ \frac{x\,(a + x)}{a} = \frac{apx}{a} + \frac{px^2}{a}$$

$$= px + \frac{px^2}{a}$$

Zusatz: Da bey diesem Kegelschnitte das Quadrat der Ordinate größer als das Rechteck aus der Abscisse und dem Parameter ist, so erhielt dieses Ueberschusses wegen (ὑπερβολή) solcher den Namen Hyperbel.

§. 308.

Lehrsatz: (Fig. 88)

Wenn man den Winkel EDH $= \alpha$, und bAH $=$ BAL $= \beta$, ferner wieder AB $= a$ setzt, so ist für jede Hyperbel ihr Parameter

$$p = \frac{2\,a\ \text{sin.}\,\beta\ (\text{sin.}\,\alpha\ \text{cos.}\,\beta - \text{cos.}\,\alpha\ \text{sin.}\,\beta)}{1 + \text{cos.}\,\alpha}$$

Beweis:

1. Im Dreyecke BAL ist

   AB : BL $=$ sin. ALB : sin. BAL.

2. Nun ist der Winkel ALB $=$ DAG $= 90° -$ ADC $= 90° - \frac{1}{2}\alpha$; mithin sin. ALB $=$ cos. $\frac{1}{2}\alpha$, und also

3. a : BL $=$ cos. $\frac{1}{2}\alpha$: sin. β, folglich

$$BL = \frac{a\ \text{sin.}\,\beta}{\text{cos.}\,\frac{1}{2}\alpha}.$$

4.

4. Eben so ist im $\triangle ABG$

$$AB : AG = \sin. AGB : \sin. ABG$$

5. Nun ist $AGB = 90^\circ - GDC = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, also $\sin. AGB = \cos. \frac{1}{2}\alpha$.

6. Ferner $ABG = ABD = 180^\circ - BDA - BAD = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - \beta = \alpha - \beta$, also $\sin. ABG = \sin. (\alpha - \beta) = \sin. \alpha \cos. \beta - \cos \alpha \sin. \beta$ (§. 307. I. Zus. Trig.) und diese Werthe Nr. 4. substituirt, giebt

7. $a : AG = \cos. \frac{1}{2}\alpha : \sin. \alpha \cos. \beta - \cos. \alpha \sin. \beta$. und

$$AG = \frac{a (\sin. \alpha \cos. \beta - \cos. \alpha \sin. \beta)}{\cos. \frac{1}{2}\alpha}$$

8. Nun ist für die Hyperbel $p = \frac{AG. BL}{AB}$ (§, 307. Nr. 10.) mithin aus Nr. 3 und 7 die Werthe gesetzt

9. $$p = \frac{a^2 \sin. \beta (\sin. \alpha \cos. \beta - \cos. \alpha \sin. \beta)}{a \cos. \frac{1}{2}\alpha^2}$$

$$= \frac{2 a \sin. \beta (\sin. \alpha \cos. \beta - \cos. \alpha \sin. \beta)}{1 + \cos. \alpha}$$

(§. 308. IV. Zus. Nr. 2 Trig.)

I. Zusatz: Eine Linie, in welcher für jeden Punct M allemal $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$, ist eine Hyperbel; denn

denn die beständigen Größen p, und a mögen jeden beliebigen Werth haben, so läßt sich aus der Gleichung des Lehrsatzes für einen gleichseitigen Kegel, dessen Winkel α = EDH entweder gegeben, oder beliebig angenommen ist, allemal der Winkel β = bAH, also die Lage der Linie Ab so bestimmen, daß der Schnitt eine Hyperbel ist, und von welcher die Gleichung gilt.

II. Zusatz: Da $y = \pm \sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}$ so theilt die Abscissenlinie Ab alle Sehnen der Hyperbel, die auf ihr senkrecht stehen, in 2 gleiche Theile, und ist also eine Axe derselben.

III. Zusatz: Für x = o, ist auch y = o, mithin ist A ein Scheitelpunct der Hyperbel; eben so ist für $x = -a$, $y = \pm \sqrt{(-ap + \frac{a^2p}{a})} = o$; mithin B ebenfalls ein Scheitelpunct

IV. Zusatz: So lange x eine positive Größe ist, so giebt es für jede Abscisse zwey einander entgegengesetzte gleiche Ordinaten, die mit ihr bis in's Unendliche wachsen.

V. Zusatz: Wenn x negativ ist, mithin die Abscissen auf der Axe nach der entgegengesetzten Richtung AB genommen werden, und $-x < a$: so ist $y^2 = -px + \frac{px^2}{a}$ eine negative, folglich

y

$y = \pm \sqrt{(-px + \frac{px^2}{a})}$ eine unmögliche Größe (§. 100. III. Zus. Arith.); das heißt, zwischen A und B giebt es keine Ordinaten.

VI. Zusatz: Wenn aber $-x > a$, so ist $y^2 = -px + \frac{px^2}{a}$ wieder eine positive Größe, mithin fangen bey B wieder Ordinaten an, und der Schnitt giebt im obern umgekehrten Kegel ebenfalls eine Hyperbel.

VII. Zusatz: Wenn man in der Gleichung für die Ellipse §. 287. die Größe a negativ setzt, so verwandelt sie sich in jene der Hyperbel.

§. 309.

Erklärungen: (Fig. 98.)

a) Der zwischen den beyden Scheiteln enthaltene Theil AB der Axe, heißt die große, oder Zwergaxe der Hyperbel, und wird immer wie bey der Ellipse mit a bezeichnet.

b) Der Mittelpunct C dieser großen Axe heißt zugleich der Mittelpunct der Hyperbel.

I. Zusatz: Die Hyperbel kann man sich als eine Ellipse, deren große Axe negativ ist, vorstellen (§. 308. VII. Zus.).

II. Zusatz: Nimmt man die Abscissen auf der Zwergaxe von ihrem Mittelpuncte C an, so ist für den

Punct

Punct M; $y^2 = \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4} ap$; denn $u = CP = \frac{1}{2} a + x$, mithin $x = u - \frac{1}{2} a$; $x^2 = u^2 - au + \frac{1}{4} a^2$, folglich

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a} \text{ (§. 307.) } = pu - \frac{1}{2} ap + \frac{pu^2}{a} - pu + \frac{1}{4} ap = \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4} ap,$$

welches man auch erhält, wenn man §. 289. die große Axe a der Ellipse negativ setzt.

III. Zusatz: Da sowohl für positive als negative Abscissen vom Mittelpuncte aus, wenn sie nur größer als die halbe große Axe sind, oder für $u > \frac{1}{2} a$, allemal $y^2 = \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4} ap$ positiv, mithin $y = \pm \sqrt{\left(\frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4} ap\right)}$ eine mögliche Größe ist, so entsprechen jeder solchen positiven Abscisse CP, zwey einander gleiche und entgegengesetzte Ordinaten PM, PM′, und eben so der negativen Abscisse Cp, die einander gleichen Ordinaten pm, pm′, und wenn CP = Cp, so ist allemal auch PM = pm; folglich hat die Hyperbel im untern Kegel sowohl, als im obern Kegel 2, mithin zusammen 4 Schenkel, die einander gleich sind.

IV. Zusatz: Für $y = \frac{1}{2}p$, oder $y^2 = \frac{1}{4}p^2$ wird (II. Zus.) $\frac{1}{4}p^2 = \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap$, oder $\frac{1}{4}p = \frac{u^2}{a} - \frac{1}{4}a$; mithin $\frac{u^2}{a} = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}p$; und
$u^2 = \frac{1}{4}(a^2 + ap)$, folglich
$u = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + ap)}$, das heißt auf beyden Seiten des Mittelpunctes giebt es auf der Zwergaxe in der Entfernung von $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + ap)}$ Puncte F, f, wo die Ordinate dem halben Parameter gleich ist, folglich hat die Hyperbel 2 Brennpuncte F, f (§. 273.) deren Entfernung vom Mittelpuncte, oder $e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + ap)}$ ist

V. Zusatz: Für $u = 0$, wird $y^2 = -\frac{1}{4}ap$, mithin $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-ap}$ eine unmögliche Größe.

§. 310.

Erklärungen: (Fig. 98.)

a) Wenn man durch den Mittelpunct C der Zwergaxe die Perpendikel $CD = CE = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$ errichtet, so heißt $DE = \sqrt{ap} = c$ wie §. 290 II. Zus. die **kleine Axe der Hyperbel**, obgleich im Mittelpuncte der großen Axe keine Ordinate möglich ist (§. 309. V. Zus.).

b) Wenn die kleinere Axe der Zwergaxe gleich ist, so heißt die Hyperbel **gleichseitig**.

I. Zusatz: Für die Absciſſen vom Scheitel an gerechnet ist in der Hyperbel $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$:

Denn

$c^2 = ap$ (Erkl.); also $p = \frac{c^2}{a}$, folglich

$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (§. 307.) $= \frac{c^2}{a}(x + \frac{x^2}{a})$

$= \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$

II. Zusatz: Für die Absciſſen vom Mittelpuncte an, wird

$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \frac{1}{4}a^2)$; Denn

$y^2 = \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap$ (§. 309. II. Zuſ.)

$= \frac{c^2}{a}(\frac{u^2}{a} - \frac{1}{4}a)$ (I. Zuſ.) $= \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \frac{1}{4}a^2)$

III. Zusatz: Die Entfernung eines jeden der beyden Brennpuncte F, f, oder

$e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + ap)}$ (§. 309 IV. Zuſ.)

$= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)}$ (Erkl.)

IV. Zusatz: Eben diese 3 vorhergehenden Gleichungen folgen aus §. 290, wenn man a negativ, und statt der kleinen Axe c die unmögliche Größe $c\sqrt{-1}$ setzt, denn $c\sqrt{-1} = \sqrt{-ap}$; mithin $-c^2 = -ap$, oder die Hyperbel ist eine Ellipse, deren kleine Axe eine unmögliche Größe ist.

V. Zusatz: Wenn man vom Scheitel A nach den Endespuncten D, oder E die gerade Linie AD, oder AE zieht, so ist $AD = AE = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)} = e$ (III. Zus.).

VI. Zusatz: Wenn man also auf der großen Axe $CF = Cf = AE$ nimmt, so sind F, und f die beyden Brennpuncte der Hyperbel.

VII. Zusatz: Eine Linie, von welcher für rechtwinklichte Coordinaten eine von den nachstehenden 4 Gleichungen paßt, ist eine Hyperbel.

1. $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (§. 308. I. Zus.)

2. $y^2 = \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap$ (§. 309. II. Zus.)

3. $y^2 = \frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$ (I. Zus.)

4. $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \frac{1}{4}a^2)$ (II. Zus.)

Denn so wie die letztern 3 Gleichungen aus der ersten abgeleitet sind, so folgt auch umgekehrt aus jeder dieser letztern die erste, mithin ist in jedem dieser Fälle die Linie eine Hyperbel (§. 308. I. Zus.).

VIII. Zusatz: In der gleichseitigen Hyperbel ist der Parameter jeder der beyden Axen gleich; denn $c = a = \sqrt{ap}$, mithin $c^2 = a^2 = ap$, und $p = a = c$.

IX.

IX. Zusatz: In der gleichseitigen Hyperbel ist also
$y^2 = ax + x^2 = u^2 - \frac{1}{4} a^2$ (VII. Zus.)

X. Zusatz: Nimmt man bey der Hyperbel überhaupt auf der kleinen Axe die Abscissen vom Mittelpuncte aus, so ist für den Punct M′ die Abscisse CG = PM′ = y, die Ordinate GM′ = CP = u, da nun $y^2 = \frac{c^2}{a^2} (u^2 - \frac{1}{4} a^2)$ (II. Zus.), so ist

$$u^2 = \frac{a^2}{c^2} (y^2 + \tfrac{1}{4} c^2)$$

§. 311.

Lehrsatz: (Fig. 98.)

Wenn man für einen beliebigen Punct M der Hyperbel aus den beyden Brennpuncten f, F die Radios Vectores fM, FM zieht, so ist ihr Unterschied der Zwergaxe a gleich, oder: fM − FM = a

Beweis:

1. Man ziehe die senkrechte Ordinate PM, und nehme die Abscisse vom Mittelpunct C aus, so ist
2. $PM^2 = y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$ (§. 310. II. Zus.), und
3. $FP = CP - CF = u - e = u - \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + c^2)}$ (§. 310. III. Zus.) mithin
4. $FP^2 = u^2 - u \sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} c^2$; folglich

5. $FM^2 = PM^2 + FP^2$

$$= \frac{c^2u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}c^2 + u^2 - u\sqrt{(a^2+c^2)}$$

$$+ \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2$$

$$= \frac{a^2+c^2}{a^2}u^2 - u\sqrt{(a^2+c^2)} + \tfrac{1}{4}a^2,$$ und

6. $FM = \pm\left(\frac{u}{a}\sqrt{(a^2+c^2)} - \tfrac{1}{2}a\right)$ (§. 100. I. Zus. und 121. Arithm.)

7. Nun ist für den kleinsten Werth von $u = \tfrac{1}{2}a$, doch $\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)}$ allemal grösser als $\tfrac{1}{2}a$, mithin um so mehr, wenn $u > \tfrac{1}{2}a$, so ist allemal $\frac{u}{a}\sqrt{(a^2+c^2)} - \tfrac{1}{2}a$ eine positive, so wie $\tfrac{1}{2}a - \frac{u}{a}\sqrt{(a^2+c^2)}$ eine negative Grösse, folglich bestimmt das obere Zeichen den Werth der positiven Grösse FM, oder

8. $FM = \frac{u}{a}\sqrt{(a^2+c^2)} - \tfrac{1}{2}a.$

9. Ferner $fP = PC + Cf = u + e = u + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)}$, also

10. $fP^2 = u^2 + u\sqrt{(a^2+c^2)} + \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2$, folglich

11. $fM^2 = PM^2 + fP^2$

$$= \frac{c^2u^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}c^2 + u^2 + u\sqrt{(a^2+c^2)} + \tfrac{1}{4}a^2$$

$+ \tfrac{1}{4}c^2$ (Nr. 2 und 10.)

$$= \frac{a^2 + c^2}{a^2} u^2 + u \sqrt{(a^2 + c^2)} + \tfrac{1}{4} a^2,$$

mithin

12. $fM = \pm \left(\frac{u}{a} \sqrt{(a^2 + c^2)} + \tfrac{1}{2} a\right)$, wo aber wieder das obere Zeichen den Werth der positiven Größe fM bestimmt; folglich

13. $fM - FM = \frac{u}{a} \sqrt{(a^2 + c^2)} + \tfrac{1}{2} a$

$- \frac{u}{a} \sqrt{(a^2 + c^2)} + \tfrac{1}{2} a$ (Nr. 8. und 12.) $= a$

§. 312.

Lehrsatz: (Fig. 98.)

Wenn zwey krumme Linien MAM′, mBm′ von einer geraden pN in A, und B durchschnitten werden, und wenn es auf letzterer zwey solche Puncte f, F giebt, daß für jeden Punct M einer dieser krummen Linien allemal $fM - FM = AB = a$ ist, so sind sie entgegengesetzte Hyperbeln, a ist ihre große Axe, und f, F die Brennpuncte derselben.

Beweis:

1. $fM - FM = a$ (per hyp.)
2. Nun setze man ferner $fM + FM = d$, so ist
3. $fM = \tfrac{1}{2} d + \tfrac{1}{2} a$ und
   $FM = \tfrac{1}{2} d - \tfrac{1}{2} a$ (§. 86. Arithm.); mithin
4. $fM^2 = \tfrac{1}{4} d^2 + \tfrac{1}{2} ad + \tfrac{1}{4} a^2$, und

5. $FM^2 = \frac{1}{4} d^2 - \frac{1}{2} ad + \frac{1}{4} a^2$ also

6. $fM^2 - FM^2 = ad$.

7. Nun theile man fF bey C in zwey gleiche Theile, und setze $CF = Cf = e$

8. Setzt man ferner $e = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + ap)}$, so ist $e^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} ap$, wo die beständige Größe oder der Parameter vollkommen bestimmt ist.

9. Zieht man noch die rechtwinklichte Ordinate PM, so ist für die Abscissen $CP = u$ vom Mittelpunct an gerechnet,

10. $fP = CP + Cf = u + e$, mithin $fP^2 = u^2 + 2eu + e^2$;

11. Eben so ist $FP = CP - CF = u - e$, also $FP^2 = u^2 - 2eu + e^2$; folglich

12. $fM^2 = PM^2 + fP^2 = y^2 + u^2 + 2eu + e^2$, und

13. $FM^2 = PM^2 + FP^2 = y^2 + u^2 - 2eu + e^2$, mithin

14. $fM^2 - FM^2 = 4eu = ad$ (Nr. 6.), also

15. $d = \frac{4eu}{a}$; und $d^2 = \frac{16e^2u^2}{a^2}$

16. Setzt man diese Werthe in die Gleichung Nr. 4. und verbindet sie mit Nr. 12., so ist

17. $y^2 + u^2 + 2eu + e^2 = \frac{4e^2u^2}{a^2} + 2eu + \frac{1}{4} a^2$, oder

$$y^2 = \frac{4e^2u^2}{a^2} - u^2 - e^2 + \frac{1}{4}a^2$$

18. Substituirt man endlich in letzterer Gleichung die Werthe aus Nr. 8, so wird

19. $$y^2 = u^2 + \frac{pu^2}{a} - u^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}a^2$$

$$= \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap,$$ folglich ist

20. Jede der beyden krummen Linien eine Hyperbel, (§. 310. VII. Zus.) und da $y = \pm(\frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap)$ so theilet die Abscissenlinie pN alle senkrechte Sehnen in zwey gleiche Theile, ist also eine Axe (§. 255.) und AB die große oder Zwergaxe (§. 309.), so wie F, f die Brennpuncte sind (§. 310. III. Zus.)

§. 313.

Aufgabe:

Eine Hyperbel zu verzeichnen.

I. Auflösung: (Fig. 99.)

1. Man nehme auf einer geraden Linie die beliebige Länge AB, und trage solche ebenfalls auf einer daneben verzeichneten Linie AG auf.

2. Ferner nehme man auf ersterer Linie AF = Bf ebenfalls von beliebiger Größe.

3.

3. Nun beschreibe man mit A1, A2, A3, A4, A5, u. s. w. deren jede größer als Af ist aus F sowohl, als f Kreise;

4. Eben so beschreibe man nun aus eben den beyden Puncten f, F mit B1, B2, B3, B4, B5 der Linie AG Kreise.

5. Die Kreise aus F mit den Radien A1, und aus f mit B1 schneiden einander in 2 Puncten, die auf verschiedenen Seiten der Centrallinie Ff liegen (§. 21. Geometr.); und eben so die Kreise, die aus f mit dem Radius A1, und aus F mit B1 beschrieben werden, und so jedes zusammengehörige Paar der übrigen Kreise.

6. Zieht man nun an einem dieser Durchschnittspuncte z. B. 4 bey A die geraden Linien f 4, F 4, so ist f4 — F4 = AB (Nr. 3. und 4), folglich jeder solcher Durchschnittspunct ein Punct einer Hyperbel (§. 312).

7. Verbindet man endlich alle diese Durchschnittspuncte der Ordnung nach bey A sowohl als B mit freyer Hand, durch eine Linie, so kömmt solche einer Hyperbel um so näher, je mehr man solche Durchschnittspuncte von ihr bestimmt hat.

II. Auflösung: (Fig. 100.)

8. Man ziehe die unbestimmte gerade Linie fO, und bestimme auf ihr nach Belieben einen andern Punct F.

9. Ferner nehme man $fB = FA$, und setze $AB = a$.

10. An f lege man längst fO ein Lineal fD, und

11. befestige das eine End einer Schnur von der Länge $fD - AB = fD - a$ im Puncte F der Linie FO, und das andere End in D am Lineal.

12. Nun halte man mit einem Bleystifte diese Schnur immer gespannt am Lineal, während man letzteres um den Punct f dreht, so verzeichnet der Bleystift die verlangte Hyperbel; denn

13. Für jeden Punct M dieser Linie ist allemal
$fM = fD - MD$.
$FM = (fD - a) - MD$ (Nr. 11.), folglich
$fM - FM = a$; und die verzeichnete Linie ist eine Hyperbel (§. 312.).

§. 314.

Lehrsatz: (Fig. 98.)

Für den Punct M der Hyperbel ist die Subtangens, oder

$$PT = \frac{2ax + 2x^2}{a + 2x} = \frac{4u^2 - a^2}{4u}.$$

Beweis:

1. Man kann sich die Hyperbel als eine Ellipse mit einer negativen Zwergaxe vorstellen (§. 309. I. Zus.), mithin auch

2. die Subtangens der Hyperbel als eine Subtangens einer solchen Ellipse.

3.

3. Nun ist für die Ellipse überhaupt:

$$PT = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x} \text{ (§. 293. I.) folglich}$$

4. für die Hyperbel:

$$PT = \frac{-2ax - 2x^2}{-a - 2x} = \frac{2ax + 2x^2}{a + 2x}$$

5. Nun ist ferner bey der Hyperbel:

$x = u - \frac{1}{2} a$ (§. 309. II. Zus.) also

6. $2ax + 2x^2 = 2au - a^2 + 2u^2 - 2au + \frac{1}{2}a^2$
$= 2u^2 - \frac{1}{2}a^2$, und

7. $a + 2x = a + 2u - a = 2u$, folglich

8. $PT = \dfrac{2ax + 2x^2}{a + 2x} = \dfrac{2u^2 - \frac{1}{2}a^2}{2u} = \dfrac{4u^2 - a^2}{4u}$

I. Zusatz: Eben so ist die Subnormal der Hyperbel, oder

$$PN = \frac{ap + 2px}{2a} = \frac{pu}{a}. \text{ Denn}$$

$$PN = \frac{-ap - 2px}{-2a} \text{ (§. 293. II.)}$$

$$= \frac{ap + 2px}{2a} = \frac{p}{a}\left(\tfrac{1}{2}a + x\right) = \frac{pu}{a} \text{ (§. 309.}$$

II. Zus.)

II. Zusatz: Der Krümmungshalbmesser der Hyperbel, oder

$$MC = \frac{(4a^2px + 4apx^2 + a^2p^2 + 4ap^2x + 4p^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{-2a^3p^2}$$

(§. 300. Nr. 11.)

X

$$= - \frac{(a^2p^2 + 4ap^2x + 4p^2x^2 + 4a^2px + 4apx^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2}$$

$$= - \frac{[(ap + 2px)^2 + 4apx(a + x)]^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2}$$

III. Zusatz: Für $x = 0$, wird

$$MC = - \frac{(a^2p^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2} = - \frac{a^3p^3}{2a^3p^2} = - \tfrac{1}{2}p;$$

am Scheitel ist also der Krümmungshalbmesser wie bey der Parabel (§. 281. II. Zus) und Ellipse (§. 300. I. Zus.), aber in Rücksicht der Axe von entgegengesetzter Lage.

IV. Zusatz: Der hyperbolische Bogen endlich, oder

$$AM = \int \left(\frac{4a^2px + 4apx^2 + a^2p^2 + 4ap^2x + 4p^2x^2}{-8a^3(px + \frac{px^2}{a})} \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

(§. 300. III. Zus.) wo man aber erst nach §. 336 Arithm. das Integral suchen muß.

§. 315.

Aufgabe: (Fig. 98.)

Für einen gegebenen Punct M der Hyperbel, deren Zwergaxe und Brennpuncte gegeben sind, die Tangens zu verzeichnen.

I. Auflösung:

1. Man berechne die Subtangens PT (§. 314.) und schneide sie

2.

2. von P aus, auf der großen Axe ab (§. 256.).

3. Ziehe zwischen T und M die gerade Linie TM, so ist sie die verlangte Tangens, denn zwischen T und M giebt es nur eine gerade Linie.

II. Auflösung:

4. Man ziehe die beyden Radios Vectores FM, fM, und

5. halbire durch eine gerade Linie den Winkel FMf.

6. Diese Linie verlängere man, bis sie mit der Axe in T zusammenstoßt, so ist

7. MT die gesuchte Tangens.

Beweis:

8. Man nehme auf dem Radius Vector fM, die Linie MR = FM, so, daß also

9. fR = fM — RM = fM — FM = a (§. 311) ist.

10. Nun ziehe man noch FR, so steht MT auf solcher senkrecht, und halbiret sie (§. 39. I. Zus. Geom.)

11. Man nehme nun an, die verlängerte Linie TM hätte ausser M noch einen Punct n mit der Hyperbel gemein, und ziehe

12. die geraden Linien Fn, fn, Rn, so ist aus Nr. 10.

13. Fn = Rn (§. 38. III. Zus. Geom.) mithin müßte

14. fn — Rn = fn — Fn = a (§. 311.) = fR (Nro. 9.), also

15.

15. $fn = fR + Rn$ seyn, welches unmöglich ist (§. 35. Geom.), folglich ist

16. MT die gesuchte Tangens für M (§. 256.)

I. Zusatz: Für einen Punct M der Hyperbel giebt es nur eine Tangens MT; denn für M ist die Subtangens (§. 314.), also auch der Punct T auf der großen Axe vollkommen bestimmt, zwischen T und M aber giebt es nur eine gerade Linie.

II. Zusatz: Die Tangens MT für jeden Punct M halbiret allemal der Winkel FMf, welchen die beyden Radii Vectores einschliessen (II. Aufl. und I. Zus.).

III. Zusatz: Man findet für M die Normal, wenn man für diesen Punct die Tangens zieht, und durch M auf letzterer einen Perpendikel errichtet, und solchen verlängert, bis er mit der Zwergaxe in N zusammenstoßt (§. 256.).

IV. Zusatz: Wenn man die beyden Radios Vectores FM, fM sowohl, als die Tangens TM verlängert, so ist allemal der Winkel, welchen der eine Radius Vector mit der Tangens einschließt, so groß, als der Winkel, welchen die Verlängerung des andern Radius Vector mit der verlängerten Tangens einschließt, oder

$f'MQ = FMT$; und $F'MQ = fMT$.

Denn $FMT = fMT$ (II. Zus.) $= f'MQ$ (§. 13. Zus. Geom.), und eben so

$fMT = FMT = F'MQ$.

V.

V. Zusatz: Verlängert man die Normal, so ist ebenfalls

$f'MN = FMN$; und $F'MN' = fMN'$; denn

$f'MQ + f'MN = 90°$ (III. Zus.) $= FMT + FMN$, nun ist

$f'MQ = FMT$ (IV. Zus.) also

$f'MN = FMN$; eben so ist auch

$F'MQ + F'MN' = 90° = fMT + fMN'$

$F'MQ = fMT$, also

$F'MN' = fMN'$.

Anmerkung: Auf den beyden letztern Zusätzen beruhet eine ähnliche Anwendung in der Theorie des Schalles nnd Lichtes, wie §. 294.; Strahlen nemlich, die vom Brennpuncte F aus auf die hohle Seite der Hyperbel, das ist nach der Richtung FM auffallen, werden in der Richtung Mf' zurückgeworfen, als kämen sie vom andern Brennpuncte f her; und umgekehrt. Wenn hingegen ein Strahl von f auf die erhabene Seite der Hyperbel, also in der Richtung fM auffällt, so wird er nach MF' zurückgeworfen, als käme er vom Brennpuncte F her; und umgekehrt.

§. 316.

Lehrsatz: (Fig. 98.)

Wenn man am Scheitel A der Hyperbel auf ihrer großen Axe einen Perpendikel errichtet, und bis zur Tangens eines Punctes M verlängert, so ist solcher, oder

$$AI = \frac{px}{2\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}}$$

Beweis:

1. Für jede krumme Linie ist allgemein:

$$AI = y - \frac{xdy}{dx}$$ (§. 257, III. Zus.)

2. Für die Hyperbel ist nun:

$$y = \sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}$$ (§. 307.), und

3. $$dy = \tfrac{1}{2}(px + \frac{px^2}{a})^{-\frac{1}{2}}(pdx + \frac{2pxdx}{a})$$

$$= \frac{pdx}{2\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}} + \frac{pxdx}{a\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}}$$

$$= \frac{ap + 2px}{2a\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}}dx$$, mithin

4. $$y - \frac{xdy}{dx} = \sqrt{(px + \frac{px^2}{a})} - \frac{apx + 2px^2}{2a\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}}$$

$$= \frac{2a(px + \frac{px^2}{a}) - apx - 2px^2}{2a\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}}$$, also

5. $$AI = \frac{2apx + 2px^2 - apx - 2px^2}{2a\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}} = \frac{px}{2\sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}}$$

I.

I. Zusatz: Wenn die Abscisse x unendlich, also $x = \infty$ gesetzt wird, so ist $px + \frac{px^2}{a} = \frac{px^2}{a}$ (§. 296 Arithm.); mithin

$$2\sqrt{\left(px + \frac{px^2}{a}\right)} = 2\sqrt{\frac{px^2}{a}} = 2x\sqrt{\frac{p}{a}},$$

folglich

$$AI = \frac{px}{2x\sqrt{\frac{p}{a}}} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{\frac{a}{p}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{ap} = \tfrac{1}{2}c$$

(§. 310.)

II. Zusatz: Die Entfernung des Punctes T, wo die Tangens die große Axe schneidet, vom Scheitel der Hyperbel, oder $AT = \frac{ax}{a+2x}$; denn allgemein ist für jede krumme Linie:

AT = Subt. − x (§. 257 II. Zus.) mithin in der Hyperbel

$$AT = \frac{2ax + 2x^2}{a+2x} - x \text{ (§. 314.)}$$

$$= \frac{2ax + 2x^2 - ax - 2x^2}{a+2x} = \frac{ax}{a+2x}$$

III. Zusatz: Für $x = \infty$; wird $a + 2x = 2x$, folglich $AT = \frac{ax}{2x} = \frac{1}{2}a$; es nähert sich nemlich AT der halben Zwergaxe AC um so mehr, je größer die Abscisse AP = x angenommen wird, und eben so verhält es sich mit AI und ihrer

Grän=

Gränze der kleinern halben Axe oder $\frac{1}{2}$ c, die veränderliche Größe x ist also hier Hilfsgröße; da nun die Gleichungen für AI im Isten, und für AT im gegenwärtigen Zusatze nach §. 299 Arith. hergeleitet, und die Hilfsgröße x weggeschafft ist, so sind beyde vollständige Gleichungen (§. 301. Arithm.)

§. 317.

Aufgabe: (Fig. 101.)

Für die Hyperbel, deren größere und kleinere Axe, oder a, und c, gegeben sind, ihre Asymptoten zuziehen.

Auflösung:

1. Man errichte durch den Scheitel A auf die große Axe einen Perpendikel, und
2. nehme auf solchen AI = AK = $\frac{1}{2}$ c.
3. Nun ziehe man vom Mittelpuncte C der großen Axe nach I und K gerade Linien CG, CH, so sind sie Asymptoten der Hyperbel.

Beweis:

4. Die Asymptote ist eine Tangens, deren Berührungspunct vom Scheitel unendlich weit entfernt ist, wo also eine der Coordinaten unendlich seyn muß (§. 265.).
5. Ferner ist durch AT, und AI die Lage jeder Tangens, mithin auch jene der Asymptote gegeben (§. 265. III. und IV. Zus.).

6.

6. Nun ist aber bey der Hyperbel für $x = \infty$
$AT = AC = \frac{1}{2} a$ und
$AI = AK = \frac{1}{2} c$ (§. 316. I. und III. Zus.),
folglich sind

7. die zwischen A und I sowohl als zwischen A und K gezogenen Linien Asymptoten der Hyperbel.

I. Zusatz: $CI = CK$ (§. 38. III. Zus. Geom.) mithin ist ICK ein gleichschenklichtes Dreyeck.

II. Zusatz: $CI^2 = CK^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} c^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}$.

III. Zusatz: In der gleichseitigen Hyperbel (§. 310.) ist der Asymptotenwinkel ein rechter, oder wenn $a = c$, so ist $ICK = 90^\circ$. Denn wenn $a = c$ so ist auch $\frac{1}{2} a = \frac{1}{2} c$, oder $AC = AI = AK$,

also $AIC = ACI = 45^\circ$
und $AKC = ACK = 45^\circ$ } (§. 47. VI. Zus. Geom.), folglich

$ACI + ACK = 90^\circ = ICK$.

IV. Zusatz: Umgekehrt, wenn der Asymptotenwinkel ein rechter ist, so ist die Hyperbel gleichseitig, oder wenn $ICK = 90^\circ$, so ist $a = c$. Denn wenn $ICK = 90^\circ$, so ist $AIC = IKC$ (I. Zus.) $= 45^\circ$ (§. 47. VI. Zus. Geom.) $= \frac{1}{2}$ ICK $=$ ACI, mithin $AI = AC$, oder $\frac{1}{2} c = \frac{1}{2} a$, also auch $a = c$.

V. Zusatz: Wenn man für eine beliebige Abscisse AP ihre senkrechte Ordinate bis an die Assymptoten

 bey-

beyderseits verlängert, so ist Pm = Pn, und Mm = Nn. Denn

$$CA : AI = CP : Pm; \text{ also } Pm = \frac{AI.\ CP}{CA}$$

$$CA : AK = CP : Pn; \text{ mithin } Pn = \frac{AK.\ CP}{CA}$$

$$= \frac{AI.\ CP}{CA} \text{ (per constr.) mithin } Pm = Pn,$$

und PM = PN (§. 308. II. Zus.) folglich

Pm — PM = Pn — PN, das ist Mm = Nn.

§. 318.

Lehrsatz: (Fig. 101.)

Für jede Absciße AP ist allemal Mm. Mn $= \frac{1}{4} c^2$.

Beweis:

1. $\triangle ACI \backsim \triangle PCm$, also
2. CA : AI = CP : Pm, oder
   $\frac{1}{2} a : \frac{1}{2} c = u : Pm$, mithin auch
3. $a^2 : c^2 = u^2 : Pm^2$, und
   $$Pm^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2}$$
   $$PM^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2 \text{ (§.310. II. Zus.) folglich}$$
4. $Pm^2 - PM^2 = \frac{1}{4} c^2$
5. Ferner $Pm^2 - PM^2 = (Pm + PM)(Pm - PM)$ (§. 103. Zus. Arithm.)
   = (Pn + PM) Mm (§. 317. V. Zus.)
   = Mn. Mm, folglich
6. Mn. Mm $= \frac{1}{4} c^2$.

I.

I. Zusatz: $Mm = \frac{c^2}{4 Mn}$, mithin nähert sich die Asymptote dem Schenkel um so mehr, je mehr Mn, mithin die Abscisse CP wächst.

II. Zusatz: Da $Mn. Mm = \frac{1}{4} c^2$ eine beständige Größe ist, so kann Mm nie = o werden, folglich die Asymptote nie mit einem Schenkel der Hyperbel zusammenstossen.

§. 319.

Erklärung: (Fig. 101.)

Wenn man vom Scheitel A der Hyperbel auf die eine Asymptote CG eine gerade Linie AL, welche zur andern Asymptote CH parallel ist, zieht, so heißt das Quadrat dieser Linie, oder AL^2 die Potenz der Hyperbel.

Zusatz: CL = AL. Denn AI : IK = AL : CK, oder 1 : 2 = AL : CK, also
$AL = \frac{1}{2} CK = \frac{1}{2} CI$ (§. 317. I. Zus.) ferner ist
AK : IK = CL : CI oder
1 : 2 = CL : CI, also
$CL = \frac{1}{2} CI = AL$.

§. 320.

Lehrsatz: (Fig. 101.)

Es ist die Potenz der Hyperbel, oder $AL^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$

Beweis:

1. AL ‡ CK, (§. 319.), also
2. $\triangle AIL \backsim \triangle KIC$, mithin auch
3. Da CI = CK (§. 317. I. Zus.) so ist ebenfalls IL = AL.
4. Ferner AI : IK = AL : CK = AL : CI, mithin $AL = \frac{AI.\ CI}{IK}$, also
5. $AL^2 = \frac{AI^2.\ CI^2}{IK^2} = \frac{\frac{1}{4}c^2.\ (\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}{c^2}$.
   (§. 317. II. Zus.)
   $= \frac{1}{4}(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2) = \frac{a^2 + c^2}{16}$

§. 321.

Erklärung: (Fig. 101.)

Wenn man vom Mittelpunct C der Hyperbel auf einer Asymptote die Abscisse CR, und von R bis an den nächsten Schenkel der Hyperbel zur andern Asymptote die Parallele RM als Ordinate zieht, so heißt die Gleichung, welche das allgemeine Verhältniß solcher Coordinaten angiebt, die Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

§. 322.

Lehrsatz: (Fig. 101.)

Wenn man die Abscisse CR auf der Asymptote mit x, die Ordinate RM mit y, und die Potenz der Hy-

Hyperbel, oder AL^2 mit p^2 bezeichnet, so ist die Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten:
$xy = p^2$

Beweis:

1. Man ziehe von M auf die Axe die rechtwinklichte Ordinate MP, und verlängere sie beyderseits bis an die Assymptoten.

2. Nun ist Rm ‡ Cn (per hyp.) mithin
$mR : mM = CR : Mn$ (§. 82. Geom.)

3. Da ferner IK ‡ mn, so ist
$\triangle MRm \backsim \triangle KCI$, also
$mR : mM = IC : IK$, mithin

4. $IC : IK = CR : Mn$, folglich
$$x = CR = \frac{IC}{IK} Mn = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2c} Mn$$
(§. 317. II. Zus.).

5. Ferner $IK : CK = Mm : RM$, mithin
$$y = RM = \frac{CK}{IK} Mm = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2c} Mm$$
folglich

6. $$xy = \frac{a^2 + c^2}{4c^2} Mn . Mm = \frac{a^2 + c^2}{4c^2} . \frac{c^2}{4} (§. 318.)$$
$$= \frac{a^2 + c^2}{16} = p^2 \text{ (§. 320.)}.$$

I. Zusatz: Da $y = \frac{p^2}{x}$, so nimmt die Ordinate immer mehr ab, je größer die Abscisse x wird,

 kann

kann aber nie ganz verschwinden, so lange x eine endliche Größe ist.

II. Zusatz: Für eine andere Absciſſe X auf der Asymptote, und Ordinate Y, ist ebenfalls $XY = p^2 = xy$, mithin
$y : Y = X : x$ das heißt, die Ordinaten verhalten sich umgekehrt wie ihre Abscissen.

III. Zusatz: Zieht man durch den Scheitel A die Linie AL zur Asymptote CH parallel, so ist CL = AL (§. 319. Zus.) = p, setzt man ferner von der Abscisse CR ihren veränderlichen Theil LR = w, so ist $x = p + w$, mithin $xy = (p + w) y = p^2$ (Lehrsatz.), welches ebenfalls eine Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist.

§. 323.

Aufgabe: (Fig. 101.)

Das zwischen der Asymptote, der Hyperbel, und den Ordinaten AL, MR enthaltene Stück ALRM zu quadriren.

Auflösung:

1. Allgemein für schiefwinklichte Coordinaten, wovon die Abscisse w gesetzt wird, ist
$R = \int \sin. \alpha.\ ydw$ (§. 268. I. Zus.).

2. Nun ist bey der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten

(p

$(p + w)\, y = p^2$, mithin $y = \frac{p^2}{p+w}$,

folglich

3. $R = \int \sin.\ mRM\ \frac{p^2}{p+w}\, dw$

$= \int p^2\ \sin.\ ICK\ \frac{dw}{p+w}$

$= p^2\ \sin.\ ICK\ \log.\ nat.\ (p + w) + C$ (§. 252 VI. Tab. Nr. 3).

4. Für $w = o$, ist auch $R = o$, mithin
$o = p^2\ \sin.\ ICK\ \log.\ nat.\ p + C$, also
$C = - p^2\ \sin.\ ICK\ \log.\ nat.\ p$. folglich

5. $ALRM = p^2\ \sin.\ ICK\ \log.\ nat.\ (p + w) - p^2\ \sin.\ ICK\ \log.\ nat.\ p$

$= p^2\ \sin.\ ICK.\ \log.\ nat.\ \frac{p+w}{p}$

$= CL^2\ \sin.\ ICK.\ \log.\ nat.\ \frac{CR}{CL}$

I. Zusatz: In der gleichseitigen Hyperbel ist ICK $= 90^\circ$ (§. 317. III. Zus.), mithin sin. ICK $= 1$, folglich

$ALRM = CL^2\ \log.\ nat.\ \frac{CR}{CL}$

II. Zusatz: Nimmt man $AL = CL$ zum Maaße, setzt daher $AL = CL = 1$, ferner $CR = n$ so ist $ALRM = \log.\ nat.\ CR = \log.\ nat.\ n$; das heißt, die Fläche ALRM giebt die Größe des natürlichen Logarithmus der entsprechenden Abscisse

scissen vom Mittelpuncte an gerechnet; daher erhielten die natürlichen Logarithmen den Namen hyperbolischer Logarithmen.

§. 324.

Lehrsatz: (Fig. 102.).

Wenn man eine beliebige Sehne ME der Hyperbel bis an ihre Asymptoten verlängert, so ist allemal
MR = EF.

Beweis:

1. Man ziehe durch M und E zwischen den Asymptoten die Linien mn, eK auf die große Axe senkrecht, so ist

2. $\triangle RmM \backsim \triangle RKE$, $\triangle FEe \backsim \triangle FMn$ (§. 92. Geom.), mithin

3. $RM : Mm = RE : EK$
   $FM : Mn = FE : Ee$, also

4. $RM.\,MF : mM.\,Mn = RE.\,EF : KE.\,Ee$, das ist:
   $RM.\,MF : \frac{1}{4}c^2 = RE.\,EF : \frac{1}{4}c^2$ (§. 318.) also

5. $RM.\,MF = RE.\,EF$. oder
   $RM\,(ME + EF) = (RM + ME)\,EF$,
   $RM.\,ME + RM.\,EF = RM.\,EF + ME.\,EF$, also
   $RM.\,ME = ME.\,EF$, und folglich

6. $RM = EF$.

I. **Zusatz:** Wenn man zwischen den Asymptoten die gerade Linie Tt zieht, welche die Hyperbel im Puncte o berührt, so ist allemal To = ot; denn man

man ziehe zur Tangens Tt eine parallele Sehne ME, und verlängere sie bis an die Asymptoten, so ist allemal RM = EF, man mag auch die Sehne so nahe an der Tangens ziehen, als man will, ist nun ihre Entfernung Null, so fallen R, F auf T, t und die beyden Puncte M, F zusammen auf o.

II. Zusatz: Wenn man vom Berührungspunct o der Tangens Tt auf die eine Asymptote CH eine Linie oL zieht, welche zur andern Asymptote CG parallel ist, so ist:

TL : LC = To : ot, folglich TL = LC.

III. Zusatz: Um also für einen gegebenen Punct o der Hyperbel eine Tangens zwischen ihren Asymptoten zu ziehen, so darf man nur durch o auf die eine Asymptote CH eine Linie oL ziehen, welche zur andern Asymptote CG parallel ist, ferner auf der ersten LT = CL nehmen, und von T nach o eine gerade Linie ziehen.

IV. Zusatz: Wenn man durch den Mittelpunct C der Hyperbel, und den Berührungspunct o der Tangens Tt eine gerade Linie CD zieht, so halbirt solche RF sowohl, als jede Sehne ME, welche zu Tt parallel ist. Denn Co : ot = CD : DF. und Co : oT = CD : DR; da nun die ersten 3 Glieder in beyden Proportionen einander gleich sind, so ist DF = DR, ferner FE = RM (Lehrsatz.), mithin DF — FE = DR — RM, folglich DE = DM.

§. 325.

§. 325.

Lehrsatz: (Fig. 102.)

Wenn man durch den Mittelpunct C der Hyperbel, und den Berührungspunct o der Tangens, zwischen den Asymptoten eine gerade Linie CQ zieht, und auf ihr die Abscissen vom Mittelpuncte an nimmt, ferner die Ordinaten mit obiger Tangens parallel sind, und Co $= \frac{1}{2}$ m; ot $=$ oT $= \frac{1}{2}$ n; die Abscisse CD $=$ w; die Ordinate DE $=$ DM $=$ Z gesetzt werden, so ist

$$Z^2 = \frac{n^2}{m^2} (w^2 - \frac{1}{4} m^2)$$

Beweis:

1. Man ziehe durch E und o zwischen den Asymptoten die Linien sr, eK auf die große Axe senkrecht.

2. $\triangle$Cot $\backsim$ CDF; mithin

3. Co : ot $=$ CD : DF, oder
   $\frac{1}{2}$ m : $\frac{1}{2}$ n $=$ w : DF, also

4. DF $= \frac{nw}{m}$

5. Ferner $\triangle$FeE $\backsim$ $\triangle$tso,
   und $\triangle$KRE $\backsim$ $\triangle$ rTo, mithin

6. FE : Ee $=$ ot : os
   ER : EK $=$ oT : or, also

7. FE. ER : eE. EK $=$ to. oT : so. or, oder
   FE. ER : $\frac{1}{4}$ c^2 $= \frac{1}{4}$ n^2 : $\frac{1}{4}$ c^2 (§. 318.), mithin

8. $\frac{1}{4} n^2 = FE.\ ER = (FD - DE)(DR + DE)$
$= (FD - DE)(FD + DE)$ (§. 324 IV. Zus.)
$= (\frac{nw}{m} - Z)(\frac{nw}{m} + Z)$ (Nr. 4.)
$= \frac{n^2 w^2}{m^2} - Z^2$ (§. 103. Zus. Arithm.), folglich

9. $Z^2 = \frac{n^2 w^2}{m^2} - \frac{1}{4} n^2 = \frac{n^2}{m^2} (w^2 - \frac{1}{4} m^2)$

I. Zusatz: $Z = \pm \frac{n}{m} \sqrt{(w^2 - \frac{1}{4} m^2)}$, mithin für $w = \pm \frac{1}{2} m$ ist allemal $Z = 0$, das ist, in der Entfernung $\frac{1}{2} m$ schneidet auf beyden Seiten die Abscissenlinie die Hyperbel in o auf der einen, und in O auf der andern Seite.

II. Zusatz: Für jedes $w > \pm \frac{1}{2} m$ giebt es in der obern und untern Hyperbel zwey einander gleiche aber entgegengesetzte Ordinaten, mithin ist die Abscissenlinie CQ ein Diameter der Hyperbel.

III. Zusatz: Im strengen Sinne versteht man aber unter einem Diameter der Hyperbel, nur den Theil Oo eines solchen, welcher zwischen den beyden Durchschnittspuncten liegt, so wie die gerade Linie $\alpha\beta$, welche durch den Mittelpunct mit der Tangens tT parallel so gezogen worden, daß zugleich $C\alpha = C\beta = ot = \frac{1}{2} n$ ist, dessen conjugirter Diameter heißt (§. 296.).

IV. Zusatz: Die Gleichung aus zweyen conjugirten Diametern ist bey der Hyperbel der Gleichung aus den beyden Axen (§. 310. II. Zus.) vollkommen ähnlich.

§. 326.

Aufgabe: (Fig. 98.)

Den zwischen dem Bogen AM, und den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM begränzten Raum der Hyperbel zu quadriren.

Auflösung:

1. Allgemein ist $R = \int y dx$ (§. 268.)

2. Nun ist bey der Hyperbel: $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (§. 307.) oder

$$y^2 = \frac{p}{a}(ax + x^2) \text{ mithin}$$

3. $y = p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} (ax + x^2)^{\frac{1}{2}}$, und

4. $\int y dx = \int p^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} dx (ax + x^2)^{\frac{1}{2}}$.

5. Dieses Integral läßt sich nun aus §. 252 der VI. Tabelle Nr. 8. bestimmen; es ist nemlich

6. $$APM = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} (a + 2x) \sqrt{(ax + x^2)}$$

$$- \frac{1}{8} a^2 \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \log.nat. [x + \tfrac{1}{2} a + \sqrt{(ax + x^2)}] + C$$

7. Nun ist für $x = 0$, auch $APM = 0$, mithin

8. $o = - \frac{1}{8} \sqrt{pa^3} . \log. nat \frac{1}{2} a + C$, also
$C = \frac{1}{8} \sqrt{pa^3} . \log. nat. \frac{1}{2} a$, folglich

9. $APM = \frac{\sqrt{p}}{4\sqrt{a}} (a + 2x) \sqrt{(ax + x^2)}$
$- \frac{1}{8} \sqrt{pa^3} . \log. nat. [x + \frac{1}{2} a + \sqrt{(ax + x^2)}]$
$+ \frac{1}{8} \sqrt{pa^3} . \log. nat. \frac{1}{2} a.$

§. 327.

Aufgabe: (Fig. 98.)

Die Oberfläche des hyperbolischrn Sphäroids zu bestimmen, welches der Bogen AM beschreibt, wenn er sich um die Zwergaxe AB der Hyperbel dreht.

Auflösung:

1. Die Gleichung für die Hyperbel aus ihren beyden Axen, und Abscissen vom Mittelpunct an gerechnet ist:
$y^2 = \frac{c^2}{a^2} (u^2 - \frac{1}{4} a^2)$ (§. 310. II. Zus.).

2. Verfährt man nun wie §. 302. Nr. 1 — 6, so erhält man

3. $2\pi y (du^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{c\pi du}{a^2} (4 (a^2 + c^2) u^2$
$- a^4)^{\frac{1}{2}}$

4. Setzt man nun $e = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + c^2)}$ (§. 310. III. Zus.), so ist
$e^2 = \frac{1}{4} (a^2 + c^2)$, mithin $16 e^2 = 4 (a^2 + c^2)$, folglich

5.

5. $Q = \int \frac{c\pi du}{a^2} (16 e^2 u^2 - a^4)^{\frac{1}{2}}$

$= \int \frac{4\, ce\pi du}{a^2} (u^2 - \frac{a^4}{16e^2})^{\frac{1}{2}} + C$

6. Dieses Integral läßt sich nun aus §. 152 Tab. VI. Nr. 6 bestimmen, es ist nemlich

7. $Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\, ce\pi}{a^2} u \sqrt{(u^2 - \frac{a^4}{16 e^2})}$

$- \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{16e^2} \cdot \frac{4\, ce\pi}{a^2}$ log. nat. $[u + \sqrt{(u^2 - \frac{a^4}{16e^2})}] + C$

$= \frac{2\, ce\pi u}{a^2} \sqrt{(\frac{16\, e^2 u^2 - a^4}{16\, e^2})} - \frac{a^2 c\pi}{8e}$

log. nat. $[u + \sqrt{(\frac{16\, e^2 u^2 - a^4}{16\, e^2})}] + C$

$= \frac{c\pi u}{2a^2} \sqrt{(16\, e^2 u^2 - a^4)} - \frac{a^2 c\pi}{8e}$

log. nat. $[\frac{4\, eu + \sqrt{(16\, e^2\, u^2 - a^4)}}{4\, e}] + C$

8. Nun ist für $u = \frac{1}{2}\, a$, die Fläche $Q = 0$, mithin

9. $0 = \frac{ac\pi}{4a^2} \sqrt{(4 e^2\, a^2 - a^4)} - \frac{a^2\, c\pi}{8e}$

log. nat. $[\frac{2\, ac + \sqrt{(4a^2\, e^2 - a^4)}}{4e}] + C$

=

$$= \frac{c\pi}{4} \sqrt{(4e^2 - a^2)} - \frac{a^2 c\pi}{8e}$$

$$\text{log. nat.} \left[\frac{2ae + a\sqrt{(4e^2 - a^2)}}{4e}\right] + C, \text{ also}$$

10. $$C = \frac{a^2 c\pi}{8e} \text{ log. nat.} \left[\frac{2ae + a\sqrt{(4e^2 - a^2)}}{4e}\right]$$

$$- \frac{c\pi}{4} \sqrt{(4e^2 - a^2)}, \text{ folglich}$$

11. $$Q = \frac{c\pi u}{2a^2} \sqrt{(16e^2u^2 - a^4)}$$

$$- \frac{c\pi}{4} \sqrt{(4e^2 - a^2)} + \frac{a^2 c\pi}{8e}$$

$$\text{log. nat.} \frac{2ae + a\sqrt{(4e^2 - a^2)}}{4eu + \sqrt{(16e^2u^2 - a^4)}}$$

12. Setzt man endlich für $16e^2$, und $4e^2$ deren Werthe, so wird

$$Q = \frac{c\pi u}{2a^2} \sqrt{(4a^2u^2 + 4c^2u^2 - a^4)} - \frac{c^2\pi}{4}$$

$$+ \frac{a^2 c\pi}{8e} \text{ log. nat.} \frac{2ae + ac}{4eu + \sqrt{(4a^2u^2 + 4c^2u^2 - a^4)}}$$

§. 328.

Aufgabe: (Fig. 98.)

Die hohle krumme Fläche zu quadriren, welche der hyperbolische Bogen AM beschreibt, wenn er sich um die kleine Axe DE dreht.

Auf-

Auflösung:

1. Für Abscissen auf der kleinen Axe von ihrem Mittelpuncte aus ist $u^2 = \frac{a^2}{c^2} (y^2 + \frac{1}{4} c^2)$ (§. 310. X. Zus.).

2. Behandelt man diese Gleichung wie §. 304. und setzt $e = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + c^2)}$ (§. 310. III. Zus.), so erhält man:

3. $$Q = \frac{a\pi y}{2c^2} \sqrt{(c^4 + 4a^2y^2 + 4c^2y^2)}$$

$$+ \frac{ac^2\pi}{8e} \log. \text{nat.} \left[\frac{4ey + \sqrt{(c^4 + 4a^2y^2 + 4c^2y^2)}}{c^2}\right]$$

§. 329.

Aufgabe: (Fig. 98.)

Das hyperbolische Sphäroid zu cubiren, welches der Bogen AM beschreibt, wenn er sich um die Zwergaxe AB dreht.

Auflösung:

1. Nimmt man auf der großen Axe die Abscissen vom Scheitel an, so ist:

2. $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$, also

3. $K = \int \pi y^2 dx$ (§. 270. I.) $= \int \pi (pxdx + \frac{px^2dx}{a})$

$$= \pi (\tfrac{1}{2} px^2 + \frac{px^3}{3a}) + C$$

4.

4. Da aber für $x = 0$, die ganze Gleichung Null wird, so ist auch $C = 0$, folglich

5. $K = \pi . \frac{3apx^2 + 2px^3}{6a} = \frac{\pi px^2}{6a}(3a + 2x).$

Zusatz: Für jeden Kegelschnitt ist:

$K = \frac{\pi px^2}{6a}(3a + 2x)$; denn für die Hyperbel leuchtet solches aus der vorhergehenden Aufgabe, so wie für die Ellipse aus §. 306. VI, Zus. unmittelbar ein; bey der Parabel ist nun $a = \infty$, mithin

$K = \frac{\pi px^2}{6\infty}(3\infty \mp 2x) = \frac{3\pi px^2}{6} = \frac{1}{2}\pi px^2$ (§. 286.).

V. Abschnitt.

Vom Kreise.

§. 330.

Aufgabe: (Fig. 82.)

Den spitzigen Kreisbogen $AM = Z$ aus dessen Sinus $MP = y$ für den Halbmesser 1 zu rectificiren.

Auflösung:

1. Wenn man den Diameter AO zur Abscissenlinie, und A als ihren Anfangspunct nimmt, so ist der Quersinus $AP = x$, und $AO = 2$, mithin

2.

2. $y^2 = 2x - x^2$ (§. 101. Zus. Geom.), also

$$2ydy = 2dx - 2xdx,$$ oder

$$ydy = dx - xdx,$$ also

$$dx = \frac{ydy}{1-x},$$ und

$$dx^2 = \frac{y^2}{1-2x+x^2}dy^2 = \frac{y^2}{1-y^2}dy^2,$$

folglich

3. $dy^2 + dx^2 = (1 + \frac{y^2}{1-y^2})dy^2 = \frac{1}{1-y^2}dy^2,$

und

4. $\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dZ$ (§.267) $= dy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$

5. Nun ist aus §. 138. Arithm.

$$(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}y^2 + \frac{1(1+2)}{1.\ 2.\ 4}y^4$$

$$+ \frac{1(1+2)(1+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 8.}y^6$$

$$+ \frac{1(1+2)(1+4)(1+6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 16}y^8 + \ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{3}{8}y^4 + \tfrac{5}{16}y^6 + \tfrac{35}{128}y^8 + \ldots\ldots,$$

mithin

6. $dZ = dy + \frac{1}{2}y^2dy + \frac{3}{8}y^4dy + \frac{5}{16}y^6dy + \frac{35}{128}y^8dy + \ldots\ldots$

7. $Z = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{35}{1152}y^9 + \ldots$ (§. 336. Arithm.)

8. Da endlich für $x = 0$, y sowohl als Z Null ist, so wird auch $C = 0$, man darf also keine beständige Größe addiren.

Zu-

Zusatz: Für $y = 1$ ist $Z = \frac{1}{4}\pi$, mithin

$$\frac{1}{4}\pi = 1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \frac{5}{112} + \frac{35}{1152} + \ldots\ldots$$

Da aber diese Reihe nur wenig convergirend ist, so müßte man eine beträchtliche Anzahl Glieder derselben berechnen, um den Quadranten, oder $\frac{1}{4}\pi$ mit einiger Schärfe zu bestimmen.

§. 331.

Aufgabe:

Für den Halbmesser 1 aus der gegebenen Tangens t ihren entsprechenden Kreisbogen Z zu rectificiren.

Auflösung:

1. Wenn man §. 244. $a = 1$, $x = t$; Arc. tang. $x = Z$ setzt, so ist

2. $dZ = dt\,(1 + t^2)^{-1} = \frac{1}{1 + t^2}\,dt$

3. Nun ist $\frac{1}{1 + t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - t^{10} + \ldots$, (§. 109 III. Zus. Arithm.) mithin

4. $dZ = dt - t^2\,dt + t^4\,dt - t^6\,dt + t^8\,dt - t^{10}\,dt + \ldots$, und

5. $Z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{11}t^{11} + \ldots$
$= t\,(1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{7}t^6 + \frac{1}{9}t^8 - \frac{1}{11}t^{10} + \ldots\ldots)$

6. Da wieder für $t = 0$, alle Glieder der Reihe sowohl, als Z selbst Null sind, so ist auch $C = 0$, man darf daher keine beständige Größe addiren.

I. Zusatz: Für den Bogen von 45° oder $\frac{1}{8}\pi$ ist t $= 1$ (§. 300. II. Zus. Trig.) mithin

$$\tfrac{1}{8}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \ldots.$$

Da aber diese Reihe ebenfalls wenig convergirend ist, so ist sie zur Bestimmung von π nicht schicklich.

II. Zusatz: Wenn $\alpha + \beta = 45°$, so ist

$$\text{tang.}\,(\alpha + \beta) = 1 = \frac{\text{tang.}\,\alpha + \text{tang.}\,\beta}{1 - \text{tang.}\,\alpha\ \text{tang.}\,\beta}$$

(§. 310. Trigon.), also

$$1. - \text{tang.}\,\alpha\ \text{tang.}\,\beta = \text{tang}\,\alpha + \text{tang.}\,\beta$$

$$1 - \text{tang.}\,\beta = \text{tang.}\,\alpha + \text{tang.}\,\alpha\ \text{tang.}\,\beta$$

$$= \text{tang.}\,\alpha\,(1 + \text{tang.}\,\beta)\text{, also}$$

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{1 - \text{tang.}\,\beta}{1 + \text{tang.}\,\beta}$$

III. Zusatz: Für $\alpha + \beta = 45°$ hat β keinen bestimmten Werth, man kann also β so bestimmen, daß tang. $\beta = \frac{1}{2}$ ist;

Nun wird: tang. $\alpha = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$ (II. Zus.) $= \frac{1}{3}$.

IV. Zusatz: Setzt man die gefundenen Werthe dieser beyden Tangenten in die Gleichung Nr. 5 so wird

$$\alpha = \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}$$

$$- \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^6} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^8} - \ldots.\Big)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}.\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5}.\frac{1}{2^4} - \frac{1}{7}.\frac{1}{2^6} + \frac{1}{9}.\frac{1}{2^8} - \ldots)$$

§. 332.

Aufgabe:

Das Verhältniß des Diameters zur Peripherie im Kreise zu bestimmen (§. 127. Geom.)

Auflösung:

1. Man setze den Halbmesser = 1, und
2. $\alpha + \beta = 45^\circ$ so, daß
3. Ueberdieß tang. $\beta = \frac{1}{2}$ ist (§. 331. III. Zus.), so wird
4. $\alpha = \frac{1}{3}.(1 - \frac{1}{3}.\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5}.\frac{1}{3^4} - \frac{1}{7}.\frac{1}{3^6} + \frac{1}{9}.\frac{1}{3^8} - \ldots)$
5. $\beta = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}.\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5}.\frac{1}{2^4} - \frac{1}{7}.\frac{1}{2^6} + \frac{1}{9}.\frac{1}{2^8} - \ldots)$
6. Nun reducire man in jeder Reihe die positiven und negativen Glieder abgesondert auf Decimalbrüche, so ist:

7. $1 = 1{,}0000000000$

$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^4} = 0{,}0024691358$

$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^8} = 0{,}0000169350$

$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{12}} = 0{,}0000001447$

$\frac{1}{17} \cdot \frac{1}{3^{16}} = 0{,}0000000013$

$1{,}0024862168$

8. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} = 0{,}0370370370$

$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^6} = 0{,}0001959631$

$\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{10}} = 0{,}0000015395$

$\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3^{14}} = 0{,}0000000139$

$\frac{1}{19} \cdot \frac{1}{3^{18}} = 0{,}0000000001$

$0{,}0372345536$, mithin

9. $1{,}0024862168$

$-\ 0{,}0372345536$

$\alpha = \frac{1}{3}\ 0{,}9652516632$ (Nr. 4)

$= 0{,}3217505544$

10. $1 = 1,0000000000$

$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4} = 0,0125000000$

$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^8} = 0,0004340277$

$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^{12}} = 0,0000187800$

$\frac{1}{17} \cdot \frac{1}{2^{16}} = 0,0000008975$

$\frac{1}{21} \cdot \frac{1}{2^{20}} = 0,0000000454$

$\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^{24}} = 0,0000000023$

$1,0129537529$

11. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} = 0,0833333333$

$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^6} = 0,0022321428$

$\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2^{10}} = 0,0000887784$

$\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2^{14}} = 0,0000040690$

$\frac{1}{19} \cdot \frac{1}{2^{18}} = 0,0000002007$

$\frac{1}{23} \cdot \frac{1}{2^{22}} = 0,0000000103$

$\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2^{26}} = 0,0000000005$

$= 0,0856585350$, mithin

12. $1{,}0129537529$
$- 0{,}0856585350$

$\beta = \frac{1}{2}\, 0{,}9272952179$ (Nr. 5.)
$= 0{,}4636476090$
$\alpha = 0{,}3217505544$ (Nr. 9.), also

13. $\alpha + \beta = 0{,}7853981634 = \frac{1}{8}\pi$, folglich
$\frac{1}{2}\pi = 3{,}1415926536$, das ist

14. $1 : \frac{1}{2}\pi = 1 : 3{,}1415926536$, mithin auch
$2 : \pi = 1 : 3{,}1415926536$, welches das gesuchte Verhåltniß des Diameters zur Peripherie ist.

Anmerkung:

Um für die in der Geometrie §. 275. III. Aufl. zur Ausmessung des Faßes aufgestellten Regeln ihre Gründe anzugeben, und für den Anfånger zur Uebung, füge ich nachstehende Aufgaben bey.

§. 333.

Aufgabe: (Fig. 103.)

Aus der Långe GI, der Tiefe EF, und dem Diameter AB eines Bodens den kôrperlichen Inhalt des Faßes zu bestimmen, wenn man den Bogen AEC als eine Parabel, EF für die Axe derselben, und das Faß selbst als ein abgekürztes Sphåroid nimmt, welches der Bogen AEC erzeuget, wenn er sich um GI dreht.

Auf-

Auflösung:

1. Für den beliebigen Punct M ziehe man die senkrechte Ordinate MQ, und auf GI den Perpendikel MO.

2. Bestimmt man die Abscissen vom Scheitel aus und bezeichnet den Parameter mit p, so ist
$EQ = x$,
$MQ = OH = y$; und $y^2 = px$ (§. 274.).

3. Nun ziehe man AN mit GH parallel und setze der Kürze wegen:
$AG = \frac{1}{2} AB = \beta$; $EH = \frac{1}{2} EF = b$; $EN = b - \beta = c$; ferner
$GH = \frac{1}{2} GI = l$; und $\frac{1}{p} = n$, so wird

4. $x = \frac{1}{p} y^2$ (Nr. 2.) $= ny^2$;
$MO = QH = b - x = b - ny^2$.

5. Zieht man endlich noch $mo \# | MO$, so ist $Oo = dy$.

6. Dreht sich nun das Flächenelement MOom um GH, so wird das Körperelement, oder
$dK = \pi . MO^2 . Oo$ (§. 270.) $= \pi (b - ny^2)^2 dy$
$= \pi (b^2 - 2 bny^2 + n^2 y^4) dy$, mithin

7. $K = \pi (b^2 y - \frac{2}{3} bny^3 + \frac{1}{5} n^2 y^5)$
$= \pi y (b^2 - \frac{2}{3} bny^2 + \frac{1}{5} n^2 y^4)$

8. Da endlich für $x = 0$, y sowohl, als K, mithin alle Glieder dieser Gleichung verschwinden,

so

so ist C = o, mithin darf keine beständige Größe addirt werden.

9. Setzt man $x = EN = c$ (Nr. 3.), so wird $y = AN = l$, und $x = ny^2 = c$; $n^2y^4 = c^2$ (Nr. 4.) folglich der körperliche Inhalt des halben Faßes aus Nr. 7., oder

10. $\frac{1}{2}$ Dol. $= \pi\, l\, (b^2 - \frac{2}{3}\, bc + \frac{1}{5}\, c^2)$, und

Dol. $= \pi\, 2l\, (b^2 - \frac{2}{3}\, bc + \frac{1}{5}\, c^2)$

I. Zusatz: Für die Länge GI = 43, Tiefe EF = 30, Diameter AB = 24, alles in baierischen Decimalzoll bestimmt, wird $2l = 43$; $b = 15$; $\beta = 12$; $c = 3$; mithin

$b^2 = 225$	log. 196,8 = 2,2940251
$\frac{1}{5}\, c^2 = 1,8$	log. π = 0,4971499
	log. 2 l = 1,6334685
$b^2 + \frac{1}{5}\, c^2 = 226,8$	
$\frac{2}{3}\, bc = 30$	log. Dol. = 4,4246435
$b^2 - \frac{2}{3}\, bc + \frac{1}{5}\, c^2 = 196,8$	

mithin Dol. = 26585 baier. Decimal-Cubikzoll

Da nun eine baierische Maß 43 Dec. Cubikzoll, und der Eymer zu 60 Maß 2580 baierische Decimal-Cubikzoll hält (Arithm. Anh.), so beträgt der Inhalt dieses Faßes 10 Eymer 18 $\frac{1}{4}$ Maß.

II. Zusatz. Wäre der Diameter CD des andern Bodens von AB unterschieden, so müßte man jede Hälfte des Faßes besonders berechnen.

§. 334.

Aufgabe: (Fig. 103.)

Aus der Länge GI, Tiefe EF, und Diameter AB des Bodens, den körperlichen Inhalt des Faßes zu suchen, wenn man AEC als einen elliptischen Bogen, EF als die kleine, GI als einen Theil der großen Axe, und das Faß selbst als ein abgekürztes elliptisches Sphäroid nimmt, welches der Bogen AEC begränzt, indem er sich um die große Axe GI dreht.

Auflösung:

1. Wenn man die Abscissen auf der großen Axe vom Mittelpunct H an rechnet, so ist für den Punct M, MO = y, HO = u, und wenn man die kleine Axe EF = 2b, also EH = b, und die große Axe = 2a setzt, so wird (§. 290. V. Zus.)

2. $y^2 = b^2 - \frac{b^2u^2}{a^2}$, und

3. das von der Fläche MOHE beschriebene Sphäroid §. 306, oder

$$K = \pi u \left(b^2 - \frac{b^2u^2}{3a^2}\right)$$

4. Nun ist aus Nr. 2.

$a^2y^2 = b^2a^2 - b^2u^2$; $a^2(b^2 - y^2) = b^2u^2$ also

$a^2 = \frac{b^2u^2}{b^2 - y^2}$, mithin

5.

5. $K = \pi u \left(b^2 - \frac{b^2 u^2}{3} \times \frac{b^2 - y^2}{b^2 u^2}\right)$

$= \pi u \left(b^2 - \frac{1}{3} b^2 - \frac{1}{3} y^2\right)$

$= \pi u \left(\frac{2}{3} b^2 - \frac{1}{3} y^2\right)$

5. Man setze nun wieder $GH = \frac{1}{2} GI = l$; $AG = \frac{1}{2} AB = \beta$, und $b - \beta = c$, also $\beta = b - c$, so wird

6. für $u = l$, $y = \beta = b - c$, und $K = \frac{1}{2}$ Dol. mithin

7. $\frac{1}{2}$ Dol. $= \pi l \left(\frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} \beta^2\right)$, oder auch

$= \pi l \left(\frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} b^2 - \frac{2}{3} bc + \frac{1}{3} c^2\right)$

$= \pi l \left(b^2 - \frac{2}{3} bc + \frac{1}{3} c^2\right)$, folglich

8. Dol. $= \pi\, 2l \left(\frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} \beta^2\right)$

$= \pi\, 2l \left(b^2 - \frac{2}{3} bc + \frac{1}{3} c^2\right)$

I. Zusatz: Letztere Gleichung dient zur Vergleichung mit der vorhergehenden §. 333.

II. Zusatz: Dol. $= \frac{1}{3} \pi\, 2l \left(2 b^2 + \beta^2\right)$, das ist nach der Figur

$$= \frac{1}{3} \pi AC \left(\frac{2 EF^2 + AB^2}{4}\right) = \frac{\pi AC (2EF^2 + AB^2)}{12}$$

welches die im §. 275. Zus. Geom. aufgestellte Regel ist.

III. Zusatz: Bey verschiedenen Faßböden, wo also AB, CD ungleich sind, muß man jede Hälfte des Faßes besonders suchen; es ist alsdann:

Dol.

$$\text{Vol.} = \tfrac{1}{3}\pi . \tfrac{1}{2} AC \left(\frac{2 EF^2 + AB^2}{4}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\pi . \tfrac{1}{2} AC \left(\frac{2 EF^2 + CD^2}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi . AC (4 EF^2 + AB^2 + CD^2)}{24}$$

So wie es die III. Auflösung des 275. §. der Geometrie angiebt.

IV. Zusatz: Wenn wie im vorhergehenden §. $2l = 43$, $b = 15$; $\beta = 12$ baier. Decimalzoll beträgt, so ist

$\tfrac{2}{3} b^2 = 150$	ferner log. 198 = 2,2966652
$\tfrac{1}{3}\beta = 48$	log. π = 0,4971499
	log. 43 = 1,6334685
$\tfrac{2}{3} b^2 + \tfrac{1}{3}\beta^2 = 198$	
	log. Vol. = 4,4272836

Mithin Vol. = 26748 baier. Decimalcubikzoll; folglich hält solches 10 Eymer 22 Maß.

§. 335.

Aufgabe: (Fig. 103.)

Aus der gegebenen Länge GI, Spundtiefe EF, und Diameter AB eines Bodens den körperlichen Inhalt des Faßes zu suchen, wenn man AEC als einen Kreisbogen, dessen Halbmesser AK ist, und das Faß als ein abgekürztes Sphäroid nimmt, welches durch Umdrehung der Fläche GAECI um GI entstanden ist.

Auf-

Auflösung:

1. Man ziehe durch A zu GI die Parallele AC, und nehme auf ihr die Abscissen von A aus.

2. Von M ziehe man MQ mit AN parallel, und MO auf GI senkrecht.

3. Nun setze man: $AP = x$, $PM = y$;
$AG = \frac{1}{2} AB = \beta$; $EH = \frac{1}{2} EF = b$; $EN = b - \beta = c$;
$AN = GH = \frac{1}{2} GI = l$; $AK = MK = r$;
$KN = f$, so ist

4. $MO = OP + PM = \beta + y$; $MQ = PN = AN - AP = l - x$;
$KQ = KN + NQ = f + y$; $KE = r = f + c$.

5. Da sich nun der Bogen AEC nicht um die Abscissenlinie AC, sondern um die Parallele GI dreht, so muß in der Formel §. 270 statt y die Größe $MO = \beta + y$ gesetzt werden, mithin ist gegenwärtig:

6. $dK = \pi (\beta + y)^2 dx = \pi (\beta^2 + 2 \beta y + y^2) dx$, mithin

7. $K = \pi (\beta^2 x + 2 \beta \int y dx + \int y^2 dx)$
wo $C = o$ ist, weil für $x = o$ alle Glieder auf beyden Seiten verschwinden.

8. Nun ist im Kreise aus §. 101. Geometrie:
$EN : AN = AN : 2r - EN$, oder nach Nr. 3.

$c : l = l : 2r - c$, also

$2rc - c^2 = l^2$, mithin

9. $r = \frac{l^2 + c^2}{2c} = \frac{l^2}{2c} + \frac{1}{2}c = f + c$ (Nr. 4.)

10. Im rechtwinklichten Dreyecke KQM ist

$MQ^2 + KQ^2 = KM^2$, oder

$(l - x)^2 + (f + y)^2 = (f + c)^2$ (Nr. 4.);

$l^2 - 2lx + x^2 + f^2 + 2fy + y^2 = f^2 + 2fc + c^2$, mithin

11. $y^2 + 2fy = 2fc + c^2 - l^2 + 2lx - x^2$

12. Nun ist aus Nr. 9: $f = \frac{l^2}{2c} - \frac{1}{2}c$, also

$2cf = l^2 - c^2$.

Setzt man diesen Werth auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung, so wird

13. $y^2 + 2fy = l^2 - c^2 + c^2 - l^2 + 2lx - x^2 = 2lx - x^2$, mithin

$y^2 = 2lx - x^2 - 2fy$, folglich

$y^2 dx = 2lxdx - x^2 dx - 2fydx$, und

14. $\int y^2 dx = lx^2 - \frac{1}{3}x^3 - 2f \int ydx$.

Setzt man diesen Werth in die Gleichung Nr. 7., so wird

15. $K = \pi\, (\beta^2 x + lx^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2(\beta - f)\int ydx)$

16. Nun ist $\int ydx$ dem unbestimmten Segmente AMP gleich (§. 268.); für die Abscisse $x = l$, wird solches dem Abschnitte AEN, so wie K dem halben Faße gleich. Man setze nun Segm. AEN $= W$, so wird

17. $\frac{1}{2}$ Dol. $= \pi (\beta^2 l + l^3 - \frac{1}{3} l^3 + 2 (\beta - f) W)$
$= \pi (\beta^2 l + \frac{2}{3} l^3 + 2 \beta W - 2 f W)$

18. Wenn AME die wahre Länge dieses Bogens, und ϑ die relative Länge eben desselben in Theilen des Halbmessers 1 bezeichnen, so ist: AK : AN $=$ 1 : sin. ϑ (§. 323. Trig.), oder aus Nr. 3 und 4.

$f + c : l = 1 : \sin. \vartheta$, mithin

$$\sin. \vartheta = \frac{l}{f + c}$$

19. Ferner ist $1 : r = \vartheta : AME$, mithin
$AME = r \vartheta = (f + c) \vartheta$. folglich

20. Sector AKE $= \frac{1}{2} (f + c)^2 \vartheta$ (§. 151. IV. Zus. Geom.).
$\triangle AKN = \frac{1}{2} KN. AN = \frac{1}{2} f l$, also

21. $W = \frac{1}{2} (f + c)^2 \vartheta - \frac{1}{2} f l$ (§. 151. V. Zus. Geom.)

22. Ferner setze man $\vartheta - \sin. \vartheta = u$, wo also u eine Zahl ist, weil ϑ sowohl, als sin. ϑ in Theilen des Halbmessers 1 ausgedrückt sind, so wird

23. $\vartheta = \sin. \vartheta + u = \frac{l}{f + c} + u$ (Nr. 18.)
und daher

24. $W = \frac{1}{2} (f + c) l + \frac{1}{2} (f + c)^2 u - 2 f l$
$= \frac{1}{2} c l + (f + c)^2 \frac{1}{2} u$, mithin

25. $2\beta W = \beta cl + (f + c)^2 \beta u$

$$\underline{2fW = fcl + (f + c)^2 fu}, \text{ alſo}$$

$$2\beta W - 2fW = \beta cl - fcl + (\beta - f)(f + c)^2 u$$

26. Ferner $fcl = \left(\frac{l^2}{2c} - \frac{1}{2}c\right) cl$ (Nr. 12.)

$= \frac{1}{2} l^3 - \frac{1}{2} c^2 l$, mithin

$$2\beta W - 2fW = \beta cl - \frac{1}{2} l^3 + \frac{1}{2} c^2 l + (\beta - f)(f + c)^2 u.$$

Setzt man letztere Werthe in die Gleichung Nr. 17. ſo wird

27. $\frac{1}{2}$ Dol. $= \pi \left(\beta^2 l + \frac{2}{3} l^3 + \beta cl - \frac{1}{2} l^3 + \frac{1}{2} c^2 l + (\beta - f)(f + c)^2 u\right)$

$= \pi \left(\beta^2 l + \frac{1}{6} l^3 + \beta cl + \frac{1}{2} c^2 l + (\beta - f)(f + c)^2 u\right)$

$= \pi \left[l\left(\beta^2 + \frac{1}{6} l^3 + \beta c + \frac{1}{2} c^2\right) + (\beta - f)(f + c)^2 u\right]$

28. Nun iſt $\beta = b - c$ (Nr. 3.) mithin

$\frac{1}{2}$ Dol. $= \pi \left[l\left(b^2 - 2bc + c^2 + \frac{1}{6} l^2 + bc - c^2 + \frac{1}{2} c^2\right) + (\beta - f)(f + c)^2 u\right]$

$= \pi \left[l\left(b^2 - bc + \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{6} l^2\right) + (\beta - f)(f + c)^2 u\right]$ alſo

29. Dol. $= 2\pi \left[l\left(\beta^2 + \frac{1}{6} l^2 + \beta c + \frac{1}{2} c^2\right) + (\beta - f)(f + c)^2 u\right]$ oder

$= 2\pi \left[l\left(b^2 - bc + \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{6} l^2\right) + (\beta - f)(f + c)^2 u\right]$

I. Zusatz: Für $f > \beta$ ist

$$\text{Vol.} = 2\pi\,[l\,(b^2 - bc + \tfrac{1}{2}c^2 + \tfrac{1}{6}l^2 - (f - \beta)\,(f + c)^2\,u]$$

II. Zusatz: Wenn die Faßböden ungleich sind, so muß die andere Hälfte des Faßes, oder ECDF besonders aus Nr. 27 oder 28 berechnet, und $\beta = CI$ gesetzt werden.

§. 336.

Beyspiel zur vorhergehenden Aufgabe: (Fig. 103.)

Aus der Faßlänge $AC = GI = 43$, der Spundstiefe $EF = 30$, und den Diametern $AB = CD = 24$, wo die Zahlen baierische Decimalzoll bezeichnen, den körperlichen Inhalt des Faßes zu suchen.

Auflösung:

Da sich die ganze Auflösung auf den vorhergehenden §. bezieht, so wird in Bezeichnung der Nr., um die einzelnen Citaten zu vereinfachen, fortgefahren.

30. Im gegenwärtigen Falle ist nach Nr. 3.
$b = 15$; $\beta = 12$; $c = 3$; $l = 21,5$. mithin nach I. Zus.

31. $b^2 = 225$

$\frac{1}{2} c^2 = 4,5$

$\frac{1}{6} l^2 = 77,0416$

306,5416

$- bc = 45$

261,5416

$l = 21,5$

13077080
2615416
5230832

$l (b^2 - bc + \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{6} l^2) = 5623,14440$

32. $\frac{l^2 + c^2}{2c} = r = f + c$ (Nr. 9.)

$= \frac{462,25 + 9}{6} = 78,5416.$

33. Ferner log. $l = 1,3324385$

log. $f + c = 1,8950998$ mithin (Nr. 18)

log. sin. $\vartheta = 9,4373387$ (§. 8. IV. Zus.).

$= \sin 15^\circ 53'$

34. Nun ist für den Halbmesser 1

arc. $15^\circ = 0,2617994$

arc. $53' = 0,0154171$ mithin

$\vartheta = 0,2772165$

sin. $\vartheta = 0,2736794$, folglich Nr. 22.

$u = 0,0035371$

35. $f = r - c$ (Nr. 4.) $= 75{,}5416$ (Nr. 32.) mithin ist

$f > \beta$; und $f - \beta = 63{,}5416$.

36. Ferner ist:

$$\log. (f + c) = 1{,}8950998$$
$$2 = 2$$

$$\log. (f + c)^2 = 3{,}7901996$$
$$\log. (f - \beta) = 1{,}8030581$$
$$\log. u = 4{,}5486473 - 7$$

(§. 246. Arithm.)

$$\log. (f - \beta)(f + c)^2 u = 3{,}1419050$$
$$= \log. 1386{,}5$$

37. Nun ziehe man diese Zahl von obiger Nr. 31. ab, oder

$5623{,}1444 - 1386{,}5 = 4236{,}6444$.

38. Endlich ist $\log. 4236{,}65 = 3{,}6270226$

$$\log. \pi = 0{,}4971499$$
$$\log. 2 = 0{,}3010300$$

folglich I. Zus. log. Dol. $= 4{,}4252025$, mithin

39. Dol. $= 26620$ baierische Decimalcubikzoll, und hält 10 Eymer 19 Maß.

Anmerkung: Diese eben angeführte Berechnung des Faßes als eines Kreissphäroides ist so mühsam, und entspricht der Erfahrung, wie ich aus den später §. 342 angeführten Versuchen schließe, nicht genauer, als andere leichtere Berechnungen; mithin ist sie in der Ausübung nicht brauchbar.

III.

III. Hauptstück.

Von höhern algebraischen und transcendenten Linien

Vorerinnerung:

Von höhern algebraischen und transcendenten Linien hob ich nur jene, und von diesen nur jene Lehren aus, die mir die brauchbarsten schienen.

I. Abschnitt.

Von der Cissoid und Conchoid.

§. 337.

Erklärung: (Fig. 104.)

Wenn man durch den einen Endespunct B des Kreises-Durchmessers AB auf ihm einen Perpendikel BF errichtet, und vom andern Endespunct A nach BF die beliebigen geraden Linien AD, Ad u. s. f. zieht, und auf solchen immer AM = DE, Am = de u. s. f. nimmt, so heißt die Linie AmM, in welcher alle diese Puncte liegen die Cissoid des Diocles (κισσος, Epheu, ihrer Form wegen).

Anmerkung: Diocles ein griechischer Geometer erfand diese Linie, um zwischen zwey gegebenen Größen die zwey mittlern stättigen geometrischen Proportionalgrößen zu suchen.

§. 338.

Lehrsatz: (Fig. 104).

Wenn man den Diameter AB = a zur Abscissenlinie, und A als ihren Anfangspunct nimmt, dann für den beliebigen Punct M die rechtwinklichte Ordinate PM = y zieht, die Abscisse AP = x setzt, so ist für die Cissoid:

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$$

Beweis:

1. PM ∦ BD (per constr.), mithin
   AP : AB = PM : BD (§. 83. Geom.) oder
   x : a = y : BD, also

2. $BD = \frac{ay}{x}$

3. Eben so ist AP : AB = AM : AD, oder
   x : a = AM : AD, also

4. $AD = \frac{a. AM}{x}$

5. Ferner DE = AM (§. 337), und

6. $BD^2 = DE. AD$ (§. 105. Geom.) = AM. AD, mithin aus Nr. 2 und 4 die Werthe gesetzt, ist

7.

7. $\frac{a^2 y^2}{x^2} = AM. \frac{a. AM}{x} = \frac{a. AM^2}{x}$

8. Nun ist $AM^2 = AP^2 + PM^2 = x^2 + y^2$, folglich

9. $\frac{a^2 y^2}{x^2} = \frac{a(x^2 + y^2)}{x}$, also

$\frac{ay^2}{x} = x^2 + y^2$, $ay^2 = x^3 + xy^2$

$y^2 (a - x) = x^3$, folglich

$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$

I. Zusatz: Die Cissoid ist eine Linie der dritten Ordnung (§. 235.).

II. Zusatz: $y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a - x}}$, das heißt, jeder Abscisse AP entsprechen 2 gleiche einander entgegengesetzte Ordinaten PM, PM', folglich theilt die Abscissenlinie die Cissoid in zwey einander congruente Theile AM, AM'

III. Zusatz: Für $x = 0$ ist auch $y = 0$, mithin ist A der Scheitel der Cissoid, und die Abscisse AP berührt im Scheitel die beyden Aeste der Cissoid.

IV. Zusatz: Für $x = a$ wird $y = \pm \sqrt{\frac{a^3}{0}} = \infty$; und für $x > a$ ist y eine unmögliche Größe, das ist, jenseits der Linie BF giebt es keine Ordinaten, und BF wird von keinem Aste der Cissoid durchschnitten.

V.

V. Zusatz: So wie die Abscisse AP = x wächst, nimmt GM = BP = a − x, oder die Entfernung der Cissoid von der Linie BF ab, die Cissoid nähert sich also derselben immer, ohne sie zu durchschneiden (IV. Zus.), folglich ist BF eine Asymptote der Cissoid (§. 265.).

§. 339.

Erklärung: (Fig 105.)

Wenn man durch einen beliebigen Punct B der geraden Linie AC einen Perpendikel DE errichtet, von C aus die geraden Linien CM, Cm u. s. f. zieht, und auf letztern FM = fm u. s. f. = BA nimmt, so heißt die Linie AmM eine Conchoid oder Muschellinie.

Anmerkung: Nikomedes ein griechischer Geometer, der ohngefähr im zweyten Jahrhundert vor Christi Geburt lebte, erfand diese Linie, um durch ihre Hilfe zwischen zwey gegebenen Größen zwey stetige geometrische Proportionalgrößen zu finden.

§. 340.

Lehrsatz: (Fig. 105.)

Wenn man AB = a, BC = b, die rechtwinklichten Coordinaten BP = x, MP = y setzt, so ist für die Conchoid:

$$y^4 + 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2) y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0$$

Be-

Beweis:

1. Man ziehe durch M auf AC den Perpendikel MG, so ist MG = BP = x; und BG = PM = y.

2. Ferner $FP = \sqrt{(FM^2 - MP^2)} = \sqrt{(AB^2 - MP^2)}$ (§. 339.)
$= \sqrt{(a^2 - y^2)}$, mithin

3. $BF = BP - FP = x - \sqrt{(a^2 - y^2)}$.

4. BP ‡ GM, mithin
BC : BF = CG : GM, oder
$b : x - \sqrt{(a^2 - y^2)} = b + y : x$ (Nr. 1)
mithin
$bx = bx + xy - (b + y)\sqrt{(a^2 - y^2)}$, also

5. $xy = (b + y)\sqrt{(a^2 - y^2)}$
$x^2y^2 = (b^2 + 2by + y^2)(a^2 - y^2)$
$= a^2b^2 + 2a^2by + a^2y^2 - b^2y^2 - 2by^3$
$- y^4$, folglich

6. $y^4 + 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 - 2a^2by$
$- a^2b^2 = 0$

I. Zusatz: Die Conchoid ist eine Linie der vierten Ordnung (§. 235.).

II. Zusatz. Nimmt man x negativ, oder die Abscissen von B gegen D zu, so entsprechen allemal gleiche Ordinaten, mithin theilet AC die Muschellinie in zwey congruente Theile.

III.

III. Zusatz: $x^2 = \frac{a^2 b^2}{y^2} + \frac{2a^2 b}{y} + a^2 - b^2 - 2by - y^2$; wenn also $y = 0$ werden soll, so muß $x = \infty$ werden, das heißt, die Chonchoid stoßt mit der geraden Linie DE nie zusammen.

IV. Zusatz: Je kleiner daher y wird, desto größer muß x seyn, folglich wenn die Abscisse zunimmt, so nähert sich die Conchoid der Linie DE, folglich ist letztere ihre Asymptote (§. 265.).

V. Zusatz: Für $y = a$ wird

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2} + \frac{2a^2 b}{a} + a^2 - b^2 - 2ab - a^2 = 0;$$

mithin auch $x = 0$.

VI. Zusatz: Da $xy = (b+y)\sqrt{(a^2 - y^2)}$ (Nr. 4.) so ist

$$x = \frac{(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}}{y},$$ ferner

$$\sqrt{(a^2 - y^2)} = \frac{xy}{b+y},$$ und

$$b + y = \frac{xy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$$

§. 341.

Aufgabe: (Fig. 105.)

Das Sphäroid zu cubiren, welches durch den Bogen AM der Conchoid begränzt wird, wenn sich solcher um die Asymptote, oder Abscissenlinie DE dreht.

Auf-

Auflösung:

1. $x = \frac{(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}}{y}$ (§. 340. VI. Zus.)

$= \left(\frac{b}{y} + 1\right)\sqrt{(a^2-y^2)}$, also

2. $dx = -by^{-2}dy(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$

$-\left(\frac{b}{y}+1\right)(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}ydy$

$= -\left(\frac{b(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{y^2} + \frac{b+y}{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}\right)dy$

$= -\frac{b(a^2-y^2)+y^2(b+y)}{y^2(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}dy$

$= -\frac{a^2b+y^3}{y^2(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}dy$, mithin

3. $K = \int \pi y^2 dx$ (§.270.) $= \int -\frac{\pi(a^2b+y^3)}{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}dy$

$= -\int \frac{a^2 b\pi dy}{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{\pi y^3 dy}{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} + C.$

4. Nun ist $\int \frac{a^2 b\pi dy}{(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} = a^2 b\pi$ arc. sin. $\frac{y}{a}$

(§. 252. Tab. VI. Nr. 18.)

5. Da ferner im Differential $\pi y^3 dy (a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ der um 1 vermehrte Exponent der veränderli-

chen

chen Größe ausser dem Binomio, durch den Exponenten eben dieser veränderlichen Größe im Binomio dividirt, eine positive ganze Zahl, nemlich $\frac{3+1}{2} = 2$, zum Quotienten giebt, so läßt sich dieses Differential aus §. 331 Arithm. integriren.

6. Setzt man nemlich $a^2 - y^2 = Z$; statt n, m, p, b und g aber ihre Werthe, so ist

7. $\pi y^3 dy (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \pi Z^{-\frac{1}{2}} dZ (Z - a)$
$= \frac{1}{2} \pi Z^{\frac{1}{2}} dZ - \frac{1}{2} a \pi Z^{-\frac{1}{2}} dZ$, mithin

8. $\int \pi y^3 dy (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \pi Z^{\frac{3}{2}} - a \pi Z^{\frac{1}{2}}$
$= \pi Z^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{3} Z - a)$

9. Substituirt man aus Nr. 6. für Z dessen Werth, und statt a im gegenwärtigen Falle den ersten Theil des Binomiums a^2, so wird

10. $\int \pi y^3 dy (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \pi \sqrt{(a^2 - y^2)} (\frac{1}{3} a^2 - \frac{1}{3} y^2 - a^2)$
$= \pi \sqrt{(a^2 - y^2)} \times - \frac{1}{3} (2a^2 + y^2)$
$= - \frac{1}{3} \pi (2a^2 + y^2) \sqrt{(a^2 - y^2)}$.

11. Setzt man diesen Werth, und jenen Nr. 4 in die Gleichung Nr. 3, so wird

12. $K = - a^2 b \pi.\ \text{arc. sin.} \frac{y}{a}$
$+ \frac{1}{3} \pi (2a^2 + y^2) \sqrt{(a^2 - y^2)} + C$

13.

13. Für $y = a$, mithin für $x = 0$ (§. 340. V. Zus.) ist auch $K = 0$, mithin

14. $0 = - a^2 b \pi$ arc. sin. $1 + C$, also
$C = a^2 b \pi$ arc. sin. 1.

15. Der Bogen aber für einen Sinus, welcher dem Halbmesser 1 gleich ist, ist ein Quadrant, und dessen Länge $= \frac{1}{2} \pi$, wenn π die Peripherie für den Durchmesser 1 ausdrückt; mithin
$C = a^2 b \pi . \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} a^2 b \pi^2$, folglich

16. $$K = a^2 b \pi \left(\tfrac{1}{2} \pi - \text{arc. sin. } \frac{y}{a}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3} \pi (2 a^2 + y^2) \sqrt{(a^2 - y^2)}$$

17. Zieht man endlich vom Quadranten den Bogen vom sin. $\frac{y}{a}$ ab, so ist der Rest dem Complementsbogen, oder dem Bogen vom cos. $\frac{y}{a}$ gleich, oder $\frac{1}{2} \pi$ — arc. sin. $\frac{y}{a}$ = arc. cos. $\frac{y}{a}$ folglich

18. $$K = a^2 b \pi \text{ arc. cos. } \frac{y}{a}$$
$$+ \tfrac{1}{3} \pi (2 a^2 + y^2) \sqrt{(a^2 - y^2)}$$
$$= a^2 b \pi \text{ arc. cos. } \frac{y}{a} + \frac{\pi (2a^2 + y^2) xy}{3 (b + y)}$$
(§. 340. VI. Zus.).

§. 342.

§. 342.

Aufgabe: (Fig. 103)

Aus der Länge AC = 43; Spundtiefe EF = 30, und dem Diameter der Böden AB = CD = 24 baier. Decimalzoll, den körperlichen Inhalt des Faßes zu suchen, wenn man solches als ein Sphäroid nimmt, welches die Daube AEC als Conchoid beschreibt, indem sie sich um GI dreht.

Auflösung:

1. $K = \frac{1}{2}$ Dol. $= a^2 b\pi$ arc. cos. $\frac{y}{a}$

$$+ \frac{\pi (2a^2 + y^2) xy}{3 (b + y)}$$

2. Nun ist in der gegenwärtigen Aufgabe:
$x = \frac{1}{2} GI = \frac{1}{2} AC = 21{,}5$; $y = \frac{1}{2} AB = 12$;
$a = \frac{1}{2} EF = 15$, mithin

3. $b + y = \frac{xy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ (§. 340. VI. Zus.)

$= \frac{258}{6} = 28{,}667$.

und also $b = 16{,}667$.

4. Ferner arc. cos. $\frac{y}{a}$ = arc. cos. $\frac{12}{15}$

= arc. cos. 0,8000000

= arc. $36^\circ\ 52'\ 12''$.

5. Für den Halbmesser 1 ist aber:

$$\text{arc. } 36^0 = 0{,}6283185$$
$$\text{arc. } 52' = 0{,}0151262$$
$$\text{arc. } 12'' = 0{,}0000582, \text{ mithin}$$

$$\text{arc. cos. } \frac{y}{a} = 0{,}6435029$$

6.
$$\log. a^2 = 2{,}3521825$$
$$\log. b = 1{,}2218574$$
$$\log. \pi = 0{,}4971499$$
$$\log. \text{arc. cos. } \frac{y}{a} = 6{,}8085504 - 7$$

$$3{,}8797402, \text{ folglich}$$

7. $$a^2 b \pi \text{ arc. cos. } \frac{y}{a} = 7581{,}2$$

8. Ferner
$$\log. \pi = 0{,}4971499$$
$$\log. (2a^2 + y^2) = 2{,}7737864$$
$$\log. xy = 2{,}4116197$$
$$\text{c. dec. log. } 3 = 9{,}5228787 - 10$$
$$\text{c. dec. l. } (b + y) = 8{,}5426178 - 10$$

$$3{,}7480525, \text{ mithin}$$

9. $$\frac{\pi (2a^2 + y^2) xy}{3(b + y)} = 5598{,}3.$$

10. Setzt man endlich die Werthe aus Nr. 7 und 9 in die Gleichung Nr. 1, so wird

11. $\frac{1}{2}$ Dol. = 7581,2 + 5598,3 = 13179,5, Dec. Cubiczoll, mithin das ganze Faß hält 26359 baier. Dec. Cubiczoll.

12. Da endlich die baier. Maaß 43 und der Eymer a 60 Maß 2580 Dec. Cubikzoll hält, so ist der Inhalt des Faßes 10 Eymer 13 Maß.

I. Anmerkung: Martin Müller, Ingenieur, Landmesser und Visirer zu Gröningen, giebt in seinem Versuche den Inhalt der Fäßer durch Anwendung der Muschellinie zu finden. Aus dem Holländischen. Leipzig bey Hilscher 1784. eine sehr weitläufige Formel an, die zugleich den wesentlichen Fehler hat, daß b = a gesetzt wird, da doch $b = \frac{xy}{\sqrt{a^2 - y^2}} - y$ (§. 340. VI. Zus.), mithin durch die Länge die Spund- und Bodentiefe vollkommen bestimmt ist. Oberreit gab dafür im I. Stücke 1787 Jahrgange des Leipziger Magazins eine andere Formel an, die, nebst ihrer Weitläufigkeit, doch noch unvollständig ist.

II. Anmerkung: Die am Ende beygefügten Tabellen VII. und VIII. enthalten die Berechnungen einiger baierischen Fäßer zur Vergleichung. Die Data zu den ersten 3 Fäßern erhielt ich durch Kollega Socher vom churfürstl. weißen Bräuhause in Kelheim; diese sind vom Fichten- und Tannenholz, und mit Birken- und Haselnußreifen abgebunden. Die übrigen 5 Fäßer Nr. V. — VIII.

die

die von Eichenholz mit eisernen Reifen abgebunden sind, gehören zum Graf Seinsheimischen braunen Bräuhause in Grünbach, dessen thätiger Verwalter Hr. Scharl mir die Data zuschickte. Das Längenmaaß ist der baierische Fuß in Duodecimalzoll getheilt, welche ich auf Decimalzolle reducirte; der Eymer ist zu 60 Maß, und die Maß zu 43 baierischen Decimal-Cubikzoll gerechnet. Da endlich die Faßböden an ihrer innern Seite eine erhabene Wölbung haben, so wurde die Länge des Faßes zweymal, in der Mitte des Bodens, und nahe an den Dauben gemessen, die erstere oder kleinere Länge steht allemal voran; für die wahre Faßlänge nahm ich aus beyden ihr arithmetisches Mittel.

II. Abschnitt.

Von der Quadratrix und Schneckenlinie.

§. 343.

Erklärung: (Fig. 106.)

Wenn man den Quadranten AB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile AD = DE = EF u. s. f. theilet, und die Radien CD, CE u. s. f. zieht; ferner den Radius in eben so viele einander gleiche Theile AP″ = P″P′ = P′P = PC theilt, durch P″ auf AC einen Perpendikel errichtet, welcher den ersten Radius CD in M″ schneidet, und eben bey allen folgen-

genden Theilungspuncten die Perpendikel P'M', PM auf ähnliche Art zieht, so heißt die Linie AM''M'MN, in welcher die Durchschnittspuncte liegen, die Quadratrix des Dinostrates.

Anmerkung: Dinostrates ein griechischer Mathematiker wird für den Erfinder dieser Linie gehalten

§. 344.

Lehrsatz: (Fig. 106.)

Wenn man den Halbmesser des Kreises CA = CB = r, den Quadranten AB = $\frac{1}{4}$ p, ferner den Bogen BF = x, und den entsprechenden Theil CP des Radius = y setzt, so ist für jeden Punct M der Quadratrix:

$$y = \frac{rx}{\frac{1}{4}p}$$

Beweis:

CP : CA = BF : BA (§. 343.), oder

$y : r = x : \frac{1}{4} p$; mithin

$$y = \frac{rx}{\frac{1}{4}p}$$

I. Zusatz: Wenn π die Peripherie des Kreises für den Durchmesser 1 bezeichnet, so ist $p = 2r\pi$ (§. 128. Geom.), mithin

$y = \frac{rx}{\frac{1}{2}.r\pi} = \frac{x}{\frac{1}{2}\pi}$ ein anderer Ausdruck der Gleichung für die Quadratrix.

II. 2

II. Zusatz: Setzt man x negativ, so wird auch y negativ, das ist, wenn man den Quadranten zu einem Halbkreise, und den Radius AC zum Diameter verlängert, so erhält man im untern Quadranten eine der vorigen Congruente aber entgegengesetzte Quadratrix.

III. Zusatz: Die Quadratrix, da ihre Gleichung die Rectification des Kreises voraussetzt, ist eine transcendente Linie.

IV. Zusatz: Die Linien P″M″, P′M′, PM lassen sich zwar geometrisch construiren, aber nicht durch Rechnung bestimmen.

§. 345.

Lehrsatz: (Fig. 106.)

Wenn man wieder $CA = r$; $AB = \frac{1}{4}p$; und $CN = a$ setzt, so ist

$a : r : \frac{1}{4}p$.

Beweis:

1. Man stelle sich den Radius CA sowohl, als den Quadranten BA in m gleiche Theile getheilt vor, so daß

2. $Cc = \frac{1}{m} AC$; und $Bb = \frac{1}{m} BA$, mithin für jeden beliebigen Werth von m allemal $Cc : AC = Bb : AB$ ist (§. 210. Arithm.)

3. Durch c sey auf AC ein Perpendikel errichtet, welcher mit dem Radius Cb in n zusammenstosset, so ist n ein Punct der Quadratrix (§. 343).

4. Da man nun m so groß, folglich Cc und Bb so klein annehmen kann, als man will, so sind beyde unendlich kleine Größen, und Bb läßt sich als ein Stück der Tangens, so wie das Dreyeck CBb als ein geradlinigtes nehmen, und die daraus abgeleiteten Verhältniße und Gleichungen sind keine falsche, sondern wenigstens unvollständige Verhältniße und Gleichungen (§. 233. VII. Zus. und §. 301. I. Zus. Arithm.).

5. In den beyden Dreyecken Ccn und CBb ist aber der Winkel Ccn = CBb = 90°, Cnc = BCb (§. 45. III. Geom.), mithin
$\triangle Ccn \backsim \triangle CBb$, und also

6. Cc : Cn = bB : Cb.

7. Nun ist Cb = CB, und da ferner n dem Punct N unendlich nahe liegt, so ist Cn von CN unendlich wenig unterschieden, und wenn man in vorhergehender Proportion CN statt Cn setzt, so bleibt die Proportion noch wenigstens eine unvollständige (§. 299. Arithm.), mithin

8. Cc : CN = Bb : CB
Cc : CA = Bb : AB (Nr. 2.), folglich

CN : CA = CB : AB (§. 218. II. Arithm.), also

9. a : r = r : ½ p

10.

10. Da endlich aus letzterer Proportion alle Hilfsgrößen entfernt sind, so ist sie eine wahre vollständige Proportion (§. 301. Arithm.).

I. Zusatz: $\frac{1}{4} p = \frac{r^2}{a}$, wenn also a und r gegeben sind, so ist $\frac{1}{4}$ p vollkommen bestimmt, mithin der Kreis quadrirt, daher erhielt die Quadratrix ihren Namen.

II. Zusatz: Da man aber a erst vermittels des Kreises finden kann, so taugt sie zur Quadratur desselben nichts.

§. 346.

Erklärung: (Fig. 107.)

Wenn aus C mit dem Halbmesser CA ein Kreis beschrieben, und eine andere Linie CMmAM′m′ so beschaffen ist, daß für jeden beliebigen Punct M derselben, wenn man durch ihn den Halbmesser CP zieht, allemal 360°: ACP = AC : CM, so heißt diese Linie CMmAM′m′ die **archimedische Schnecken- oder Spirallinie** (helix, spiralis).

Anmerkung: Archimed hat ein eigenes Buch über diese Linie verfaßt.

§. 347.

Lehrsatz: (Fig. 107.)

Wenn man den Halbmesser CA = r, die Peripherie des Kreises für diesen Halbmesser = p;

ferner den Bogen AP = x, und die gerade Linie CM = y setzt, so ist für die Spirallinie:

$$y = \frac{rx}{p}$$

Beweis:

1. 360° : ACP = AC : CM (§. 346.), ferner 360° : ACP = p : arc. AP (§. 65. I. Zus. Geom.), mithin

2. p : arc. AP = AC : CM, oder p : x = r : y, folglich

3. $y = \frac{rx}{p}$

I. Zusatz: Die archimedische Spirallinie ist eine transcendente Linie; denn sie setzt die Rectification des Kreises voraus.

II. Zusatz: Für x = 0 ist auch y = 0, und mit x wächst y so, daß wenn $x = \frac{1}{2}$ p ist, $y = \frac{1}{2}$ r wird, für x = p, ist y = r; für x > p wird auch y > r; folglich geht die archimedische Spirallinie vom Mittelpunct C des Kreises aus, und entfernet sich von solchem immer weiter.

Anmerkung: Bey der Quadratrix sowohl als bey der Schneckenlinie sind die Coordinaten x, y ganz anderer Art, als bey den vorhergehenden krummen Linien.

III. Abschnitt.

Von der Cycloide oder Radlinie.

§. 348.

Erklärug: (Fig. 108.)

Wenn sich ein Kreis, welcher die gerade Linie DE in D berührt, in der Ebene DγE auf der geraden Linie DE rollend bewegt, so heißt die krumme Linie, welche ein Punct am Umfange des Kreises beschreibt, eine **Cycloide** oder **Radlinie** (cyclois).

I. **Zusatz:** Wenn sich der Kreis einmal um seinen Mittelpunct gedreht hat, so beschreibt der Punct D die ganze Cycloide DMAE, und der vom Kreise hinterlegte Weg DE ist der Peripherie des Kreises gleich.

II. **Zusatz:** Wenn sich der Kreis auf DE in N befindet, und man nimmt auf solchem den Bogen NM = ND, so ist M zugleich ein Punct der Cycloide.

III. **Zusatz:** Ist der Kreis bis in die Mitte der Linie DE, bis B gerückt, so ist BD = BE = der halben Peripherie des Kreises, zieht man den Diameter BA, so steht solcher auf DE senkrecht (§. 76. I. Zus. Geom.), theilt die Cycloide in zwey congruente Theile, so wie solcher alle zu DE parallel gezogene Sehnen der Cycloide halbiret.

§. 349.

Erklärungen: (Fig. 108.)

Für die Cycloide DAE heißt

a) Der Punct des Kreises, welcher die gerade Linie DE im Anfange bey D berührt, der **beschreibende Punct** (punctum describens).

b) der Kreis AQBR der **erzeugende Kreis** (circulus generator).

c) der durch B gezogene Diameter AB die **Axe** (§. 255.).

d) der Punct A der **Scheitel**, und endlich

e) die gerade Linie DE die **Basis** oder **Grundlinie** der Cycloide.

Zusatz: Wenn die Grundlinie DE keine gerade, sondern selbst eine Kreislinie ist, so verzeichnet der beschreibende Punct

a) die **Epicycloide**, wenn sich der erzeugende Kreis auf der äussern oder convexen Seite der Basis fortwälzt,

b) die **Hypocycloide**, wenn die Fortwälzung desselben auf der innern, oder hohlen Seite der Basis geschieht.

§ 350.

Lehrsatz: (Fig. 108.)

Wenn man für den beliebigen Punct M der Cycloide die Linie MP zu DE parallel, also auf AB senk-

recht

recht zieht, und AP = x; PM = y; MQ = w und den Kreisbogen AQ = v setzt, so ist für den Radius AC = r

I. w = v

II. $y = v + \sqrt{(2rx - x^2)}$.

Beweis:

1. Man ziehe die beyden Sehnen BQ, NM, so ist
BP = NS (§. 45. V. Zus. Geom.)
$PQ = \sqrt{(2rx - x^2)}$ (§. 101. Geom.)
= SM, mithin
$\triangle BPQ \cong \triangle NSM$, folglich
BQ $\#$ NM, mithin auch

2. arc. BQ = arc. NM (§. 64. II. Zus. Geom.)
= ND (§. 348. II. Zus.)

3. Ferner arc. BQA = BD, also
arc. BQA — arc. BQ = BD — ND, oder
arc. AQ = BN = MQ (§. 45. IV. Zus.), folglich

4. v = w Nr. I.

5. Endlich ist PM = PQ + QM
= PQ + BN
$= \sqrt{(2rx - x^2)}$ + arc. AQ (Nr. 3.), folglich

6. $y = v + \sqrt{(2rx - x^2)}$ Nr. 2.

Zu-

Zusatz: Da die Cycloide die Rectification des Kreisbogens v voraus setzt, so ist sie eine transcendente Linie.

§. 351.

Aufgabe: (Fig. 108.)

Für den beliebigen Punct M der Cycloide die Subtangens PT zu bestimmen.

Auflösung:

1. Für jede krumme Linie mit rechtwinklichten Coordinaten ist allgemein $PT = \frac{ydx}{dy}$ (§. 257.).

2. Nun ist in der Cycloide
$y = v + \sqrt{(2rx - x^2)}$, mithin

3. $dy = dv + \frac{1}{2}(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}.(2rdx - 2xdx)$
$= dv + \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} dx$

4. Ferner $dv = \sqrt{(dx^2 + du^2)}$ (§. 267.), wenn man $PQ = u$ setzt.

5. $u = \sqrt{(2rx - x^2)}$, also
$du = \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} dx$, und
$du^2 = \frac{(r - x)^2}{2rx - x^2} dx^2$, mithin Nr. 4. substituirt, giebt

6.

$$6.\ dv = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{(r-x)^2}{2rx - x^2}\, dx^2\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2rx - x^2 + r^2 - 2rx + x^2}{2rx - x^2}\, dx^2\right)}$$

$$= \frac{r}{\sqrt{(2rx - x^2)}}\, dx.$$

7. Setzt man diesen Werth Nr. 3, so wird

$$8.\ dy = \frac{2r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}\, dx = \frac{2r - x}{\sqrt{x}\sqrt{(2r - x)}}\, dx$$

$= x^{-\frac{1}{2}}(2r - x)^{\frac{1}{2}}\, dx$, folglich

$$9.\ \frac{ydx}{dy} = PT = \frac{ydx}{x^{-\frac{1}{2}}(2r - x)^{\frac{1}{2}}dx}$$

$$= \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{(2r - x)}} = \frac{xy}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

I. Zusatz: In der Cycloide ist für jeden Punct M:
$\sqrt{(2rx - x^2)} : x = y : PT$, oder
$PQ : PA = PM : PT$, folglich ist
die Tangens MT zur Sehne AQ parallel (§. 84. Geom)

II. Zusatz: Wenn man also für einen gegebenen Punct M der Cycloide, MP auf AB senkrecht, ferner die Sehne QA, und mit dieser durch M eine Parallele zieht, bis solche mit der verlängerten Axe in T zusammenstoßt, so ist MT die Tangens für den gegebenen Punct M der Cycloide.

III. Zusatz: Zieht man ferner die Sehne QB, und mit ihr durch M eine Parallele MN, verlängert diese sowohl, als die Axe AB, bis sie zusammenstossen, so ist die bis an die Axe verlängerte Linie MN die Normal für den Punct M der Cycloide. Denn NMT = BQA (per constr.) = 90° (§. 72. III. Zus. Geom.), mithin ist die bis an die Axe gezogene Linie MN die Normallinie (§. 256. b).

IV. Zusatz: Für $x = 2r = AB$, ist $PT = \frac{2ry}{0} = \infty$, folglich ist bey D die Tangens zur Axe BA parallel.

§. 352.

Aufgabe: (Fig. 108.)

Für den beliebigen Punct M der Cycloide ihren Krümmungshalbmesser zu suchen.

Auflösung:

1. Für jede krumme Linie mit rechtwinklichten Coordinaten ist

$$\text{rad. osc.} = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} \text{ (§.264. I. Zus.).}$$

2. Nun ist in der Cycloide nach §. 351. Nr. 8.

$$dy = \frac{(2r - x)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = x^{-\frac{1}{2}}(2r - x)^{\frac{1}{2}} dx,$$

mithin

3. $dy^2 = \frac{2r - x}{x} dx^2$,

$dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{2r - x}{x}\right) dx^2 = \frac{2r}{x} dx^2$

alſo

4. $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{2r}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx^3 = (2rx^{-1})^{\frac{3}{2}} dx^3$

5. Ferner $d^2y = d\,(x^{-\frac{1}{2}}(2r - x)^{\frac{1}{2}}\,dx)$ (§. 313. IV. Zuſ. Arithm.).

$= d\,((2rx^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}\,dx)$

$= - rx^{-2} dx^2 (2rx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, mithin

6. $dxd^2y = - rx^{-2} dx^3 (2rx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

7. Setzt man dieſe Werthe aus Nr. 4 und 6 in die Gleichung Nr. 1, ſo wird

8. $\text{Rad. oſc.} = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y}$

$$= - \frac{(2rx^{-1})^{\frac{3}{2}} dx^3}{-rx^{-2} dx^3 (2rx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(2rx^{-1})^{\frac{3}{2}}}{rx^{-2}(2rx^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= r^{-1} x^2 r^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \sqrt{8(2rx^{-1} - 1)}$$

$$= r^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} 2 \sqrt{2(2rx^{-1} - 1)}$$

$$= 2\sqrt{2rx\,(2rx^{-1} - 1)}$$

=

$= 2\sqrt{2r(2r-x)} = 2\sqrt{(4r^2-2rx)}$

I. Zusatz: Für $x = o$, ist rad. osc. $= 2\sqrt{4r^2} = 4r = 2\,AB$.

II. Zusatz: Für $x = 2r$ wird rad. osc. $= o$, das ist, man mag auch mit noch so einem kleinen Halbmesser einen Kreis beschreiben, so hat die Cycloide bey D doch eine kleinere Krümmuug.

III. Zusatz: Wenn man von M aus auf der Richtung MN (§. 351. III. Zus.) die doppelte Länge dieser Linie oder 2MN nimmt, so ist solche der Krümmungshalbmesser für den Punct M der Cycloide. Denn der Krümmungshalbmesser liegt in der Richtung von MN (§. 254. IV. Zus.); ferner ist

$BQ^2 = BP^2 + QP^2 = (2r-x)^2 + 2rx - x^2$
$= 4r^2 - 4rx + x^2 + 2rx - x^2 = 4r^2 - 2rx$,

mithin

$BQ = MN = \sqrt{(4r^2-2rx)}$ folglich

$2BQ = 2MN = 2\sqrt{(4r^2-2rx)} =$ rad. osc.

§. 353.

Aufgabe: (Fig. 108.)

Den beliebigen Bogen AM der Cycloide zu rectificiren.

Auflösung:

1. In jeder krummen Linie ist für rechtwinklichte Coordinaten: $Z = \int(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 267).

2.

2. Nun ist für die Cycloide aus §. 352. Nr. 3.

$$dx^2 + dy^2 = \frac{2r}{x} dx^2 = 2rx^{-1} dx^2, \text{ also}$$

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (2rx^{-1})^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{2r}$$

3. $Z = AM = 2\sqrt{2rx}$; wo $C = 0$ ist.

I. Zusatz: Zieht man die Sehne AQ, so ist
$AQ^2 = AP^2 + PQ^2 = x^2 + 2rx - x^2 = 2rx$;
mithin
$AQ = \sqrt{2rx}$; folglich $2AQ = 2\sqrt{2rx}$ = dem Bogen AM.

II. Zusatz: Die halbe Cycloide ist also dem doppelten, und die ganze dem vierfachen Diameter des erzeugenden Kreises gleich, oder
der Bogen $AD = 2AB$; und $DAE = 4AB$.

§. 354.

Aufgabe: (Fig. 108.)

Den zwischen den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM und den Bogen AM enthaltenen Theil der Cycloide zu quadriren.

Auflösung:

1. Für rechtwinklichte Coordinaten ist allgemein:
$R = \int ydx$ (§. 268.).

2. Aus der Gleichung der Cycloide (§. 350 II.) ist nun

$$ydx = (v + (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}})\, dx$$
$$= dx\,(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} + vdx$$

3. Ferner ist $dv = rdx\,(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (§. 351. N. 6.), mithin

4. $v = r.\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$ (§. 252. Tab. VI. Nr. 24.)

5. Man setze indessen $\text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r}) = q$, folglich
$v = rq$, so ist

6. $\int ydx = \int dx\,(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} + \int rq\,dx$

7. $\int dx\,(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\,4r^2\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$
$- \frac{1}{8}(4r - 4x)\sqrt{(2rx - x^2)}$ (§. 252 Tab. VI. Nr. 28.)
$= \frac{1}{2}r^2\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$
$- \frac{1}{2}(r - x)\sqrt{(2rx - x^2)}$

8. Ferner setze man $\int rqdx = rqx + rt$, so ist
$rqdx = rqdx + rxdq + rdt$
$rdt = - rxdq.$
$dt = - xdq$

9. $dq = \frac{1}{r}\,dv$ (Nr. 5.) $= dx\,(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
(Nr. 3.), also

10. $dt = -xdx\,(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= -\frac{xdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$= \frac{(r - x)\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} - \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$= (r - x)\,dx\,(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

11. Nun ist $\int (r - x)\,dx\,(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$= \sqrt{(2rx - x^2)}$ (§. 328. Arithm.)

12. $\int \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = r.\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$
(Nr. 4.), mithin

13. $t = \sqrt{(2rx - x^2)} - r.\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$;

dieser Werth in der Gleichung N. 8. substituirt, giebt

14. $\int rqdx = rqx + r\sqrt{(2rx - x^2)} - r^2 \times$
$\text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$

$= rx\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r}) + r\sqrt{(2rx - x^2)}$

$- r^2\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$ (Nr. 5.)

15. Setzt man endlich die Werthe Nr. 7 und 14. in die Gleichung Nr. 6., so ist

16. $R = \int ydx = \frac{1}{2} r^2\ \text{arc. cos.}\ (1 - \frac{x}{r})$

$- \frac{1}{2}(r - x)\sqrt{(2rx - x^2)}$

+

$$+ rx \text{ arc. cos. } (1 - \frac{x}{r})$$

$$+ r\sqrt{(2rx - x^2)} - r^2 \text{ arc. cos. } (1 - \frac{x}{r}) + C$$

$$= rx \text{ arc. cos. } (1 - \frac{x}{r})$$

$$- \tfrac{1}{2} r^2 \text{ arc. cos. } (1 - \frac{x}{r})$$

$$+ r\sqrt{(2rx - x^2)} - \tfrac{1}{2}(r - x)\sqrt{(2rx - x^2)}$$

$$= r(x - \tfrac{1}{2} r) \text{ arc. cos. } (1 - \frac{x}{r})$$

$$+ \tfrac{1}{2}(r + x)\sqrt{(2rx - x^2)} + C$$

17. Für $x = 0$ ist nun auch $R = 0$, mithin
$0 = - \tfrac{1}{2} r^2 \text{ arc. cos. } 1 + C$
da aber arc. cos. $1 = 0$ (§. 296. III. Zus. Trig.), so ist auch $C = 0$.

I. Zusatz: Für $x = 2r$, wird die Fläche der halben Cycloide, oder

$$ADB = r(2r - \tfrac{1}{2} r) \text{ arc. cos. } (1 - \frac{2r}{r})$$

$$+ \tfrac{1}{2}(r + 2r)\sqrt{(4r^2 - 4r^2)}$$

$$= \tfrac{3}{2} r^2 \text{ arc. cos. } - 1$$

Nun ist der Bogen, dessen Cosinus dem negativen Halbmesser gleich ist, der halben Peripherie gleich (§. 296 III. und IV. Zus. Trigon.), die Hälfte aber der Peripherie vom Halbmesser 1 ist der ganzen vom Diameter 1 gleich, oder arc. cos. $-1 = \pi$, mithin $ADB = \tfrac{3}{2} r^2 \pi$, das ist, die Flä-

Fläche der halben Cycloide ist drey Hälften vom erzeugenden Kreise, folglich die Fläche der ganzen Cycloide der dreyfachen Fläche des erzeugenden Kreises gleich.

II. Zusatz: Zieht man durch A und D zu BD, und AB die Parallelen AO, DO, so ist der von ihnen und der halben Cycloide begränzte Raum, oder AOD = dem Rechtecke BO — ABD

= BD. AB — ABD

$= r\pi . 2r - \frac{3}{2} r^2 \pi = 2r^2 \pi - \frac{3}{2} r^2 \pi = \frac{1}{2} r^2 \pi$

also der Hälfte des erzeugenden Kreises gleich.

§. 355.

Erklärung: (Fig. 109.)

Wenn an die erhabene Seite der krummen Linie AFCB, welche immer nach der nemlichen Seite zu hohl bleibt, ein vollkommen biegsamer Faden gelegt, und nun so abgewickelt wird, daß allemal der abgewickelte Theil z. B. CD nach einer geraden Linie gespannt ist,

a) so heißt die krumme Linie BDEM, welche der Punct B bey der Abwicklung beschreibt, die durch die **Abwicklung erzeugte Linie** (genita ex evolutione) und

b) die Linie AFCB die abgewickelte, oder **Evolute** (evoluta).

I. Zusatz: Für jeden Punct D ist allemal die gerade Linie CD dem abgewickelten Bogen CB gleich, und berührt die abgewickelte Linie ACB in C.

II. Zusatz: Je kleiner DE ist, mithin je näher F dem Puncte C liegt, desto weniger ist FE von CD unterschieden, für den unendlich kleinen Bogen ED ist also CD der Krümmungshalbmesser und steht auf ihm senkrecht (§. 254.).

§. 356.

Lehrsatz: (Fig. 110.)

Wenn ACE eine aus der Abwicklung der halben Cycloide DMA erzeugte Linie, C ein beliebiger Punct derselben, und MC an dieser Stelle ihr Krümmungshalbmesser, mithin M der Punct ist, wo für den Punct C der ausgespannte Faden die Cycloide berührt, und wenn man ferner von M auf die Axe AB den Perpendikel MP, und die beyden Sehnen AQ, BQ zieht, endlich den Krümmungshalbmesser der Cycloide bey M = MK setzt, so ist

MC : MK = AQ : BQ

Beweis:

1. MC = arc. AM (§. 355. I. Zus.) = 2 AQ (§. 353. I. Zus.)

2. MK = 2 BQ (§. 352. III. Zus.), mithin

3. MC : MK = 2 AQ : 2 BQ = AQ : BQ.

I. Zusatz: Wenn C, folglich auch M, auf A fällt, so ist MC = 0, mithin hat die Linie ACE an der

der Stelle A mit der halben Cycloide an der Stelle D einerley Krümmung (§. 352. II. Zus.).

II. Zusatz: Fällt C auf E, also M auf D, so ist DE = arc. AD = 2AB, folglich ist die Krümmung bey E für die Linie ACE jener bey A der halben Cycloide gleich (§. 352 I. Zus.).

III. Zusatz: Da die Sehnen AQ, BQ in dem Halbkreise AQB ihrer Größe nach wechseln, so hat die aus der Abwicklung erzeugte Linie ACE mit der halben Cycloide gleiche Krümmung, aber in umgekehrter Ordnung.

IV. Zusatz: DE = 2AB ist mit letzterer oder AB parallel. Denn DE berührt bey D die Cycloide, eine Tangens der Cycloide am Puncte D ist aber zur Axe AB parallel (§. 351. IV. Zus.).

V. Zusatz: Zieht man die Basis BD, so steht AB (§. 348. III. Zus.), mithin auch DE auf ihr senkrecht.

§. 357.

Lehrsatz: (Fig. 110.)

Die durch die Abwicklung der halben Cycloide AMD erzeugte Linie ACE ist umgekehrt ihrer Evolute congruent.

Beweis:

1. Man nehme DG = $\frac{1}{2}$ DE = AB, und
2. ziehe AG, so ist AG $\overline{\overline{\#}}$ BD (§. 51. VII. Zus. Geom.)

3.

3. Ferner sind B und G rechte Winkel (§. 356. V. Zus.).

4. Nun lege man die von AG, GE und dem Bogen ACE begränzte Fläche, auf die Ebene DAB der halben Cycloide so, daß

5. G auf B, und GA längst DB zu liegen kömmt, so decken die Linien GA, GE der ersten Ebene die Linien BD, BA der halben Cycloide.

6. Da nun jedem Puncte des Bogens ACE der der Ordnung nach der nemliche Krümmungshalbmesser entspricht, der zu jenen Puncten der Cycloide in verkehrter Ordnung gehört (§. 356. III. Zus.), so deckt

7. der Bogen ACE die halbe Cycloide DMA, folglich ist

8. ACEGA $\cong$ DMABD.

Zusatz: Eben so ist die durch Abwicklung der halben Cycloide DF erzeugte Linie EF derselben in umgekehrter Ordnung congruent.

Anmerkung: Die Vergleichung zwischen der Evolute und der aus ihr durch Abwicklung erzeugten Linie läßt sich auf die nemliche Art auf andere krumme Linien fortsetzen, welches aber ausser der Sphäre des gegenwärtigen Lehrbuches liegt.

IV. Abschnitt.

Von der Epicycloide.

§. 358.

Erklärungen: (Fig. 111 u. 112.)

a) Wenn sich von zweyen Kreisen, welche in eben derselben Ebene liegen, der eine BHTB auf dem Umfange BDR des andern fortwälzet, so heißt die Curve BFVI, welche ein Punct B am Umfange des erstern dadurch beschreibt, eine Epicycloide, und zwar

α) eine äussere oder Epicycloide im engern Sinne (Fig. 111.), wenn sich der Kreis BHTB auf der äussern oder erhabenen Seite des Kreisbogens BDR fortwälzet,

β) eine innere oder Hypocycloide (Fig. 112.), wenn die Fortwälzung auf der innern hohlen Seite des Bogens Statt hat.

b) Der Kreis BHTB heißt der wälzende, oder erzeugende Kreis, und der Punct B am Umfange desselben, welcher die Epicycloide beschreibt, der beschreibende Punct, und

c) der unbewegliche Kreis, auf dessen Peripherie sich der vorhergehende wälzet, der Grundkreis oder die Basis.

I. Zusatz: Stellet man sich den Halbmesser der Basis als unendlich vor, so wird die Basis eine gerade Linie (Geometr. §. 111. IV. Zus.) und die Epicycloide geht in die Cycloide über (§. 348).

II. Zusatz: Wenn sich der erzeugende Kreis von B bis D fortwälzet, und dadurch der beschreibende Punct B das Stück BF der Epicycloide beschreibt, so ist jedesmal der Bogen DF des Erzeugungskreises, dem Bogen BD der Basis gleich, denn da sich ersterer Kreis von B bis D fortwälzet, so ist's gerade, als hätte sich vom erstern Kreise das Stück FD ab- und an dem Bogen BD der Basis aufgewickelt.

III. Zusatz: Wenn daher der beschreibende Punct des Erzeugungskreises die Basis anfänglich in B berührt, und die Fortwälzung von B bis D erfolgt, und man nimmt den Bogen DF am Erzeugungskreise = DB an der Basis, so ist F ein Punct der Epicycloide.

IV. Zusatz: Wenn der Erzeugungskreis auf der Basis den Bogen BDRI, welcher seiner Peripherie gleich ist, hinterlegt hat, so bekömmt der Punct B seine Stelle in I, mithin seine anfängliche Lage wieder, folglich ist die Epicycloide vollendet; denn setzet der Erzeugungskreis seine

Be-

Bewegung fort, so beschreibt B eine der vorigen congruente neue Epicycloide, wiederholt also immer dieselbe Curve.

V. Zusatz: Wenn die Bögen BD, DF an den beyden Kreisen einander gleich sind, so verhalten sich ihre entsprechenden Centriwinkel BAD, DEF umgekehrt wie die Radien ihrer Kreise; denn nach (Geom. §. 65. I. Zus.) ist

$$BAD : 360° = \text{arc. } BD : 2\, AB . \pi$$

$$DEF : 360° = \text{arc. } DF : 2\, ED . \pi$$

sind nun die Bögen BD und DF gleich, so ist (Arithm. §. 218. III.)

$$BAD : DEF = ED : AB, \text{ und}$$

$$BAD = \frac{ED}{AB} DEF$$

VI. Zusatz: Wenn sich die beyden Centriwinkel des Grund- und Erzeugungskreises umgekehrt wie ihre Halbmesser verhalten, so sind die entsprechenden Bögen beyder Kreise einander gleich; denn

$$\text{arc. } BD = \frac{BAD}{360°} 2\, AB\, \pi, \text{ und}$$

$$\text{arc. } DF = \frac{DEF}{360°} 2\, ED\, \pi \text{ (V. Zus.)}$$

ist nun $BAD : DEF = ED : AB$, also

$BAD . AB = DEF . ED$, so ist offenbar arc. $BD =$ arc. DF.

VII. Zusatz: Nimmt man daher die Centriwinkel so, daß BAD $= \frac{ED}{AB}$ DEF, so ist arc. BD = arc. DF und umgekehrt.

§. 359.

Aufgabe: (Fig. 111 u. 112.)

Der erzeugende Kreis berühret in B, dem Anfangspuncte einer äussern, oder innern Epicycloide, die Basis, und in dem Durchmesser BT des erstern Kreises ist ein beliebiger Punct M, mithin auch dessen Entfernung AM vom Mittelpunct A der Basis gegeben, man suchet für beyde Epicycloiden den Punct F, welcher die nemliche Entfernung hat, so daß AF = AM ist.

Auflösung:

1. Man ziehe den Halbmesser AB der Basis, so fällt er mit BT in eine gerade Linie (Geom. §. 111. I. Zus.) mithin liegt M in dieser Linie.
2. Nun beschreibe man aus A mit AM den Kreisbogen Mμ, welcher die Peripherie des Erzeugungskreises in einem Puncte H schneidet, zieht man also
3. den Halbmesser CH, so ist der Centriwinkel BCH bestimmt.

4. Fer-

4. Ferner verzeichne man den Centriwinkel $BAD = \frac{CB}{AD} BCH$, so ist der Bogen BD = dem Bogen BH (§. 358. VII. Zus.)

5. Der Halbmesser AD (Fig. 112.) oder seine Verlängerung (Fig. 111.) schneidet den Bogen $M\mu'$ (No. 2.) in dem Puncte N.

6. Nimmt man nun auf diesem Bogen die Länge NF = MH, so ist F der gesuchte Punct der beyden Epicycloiden.

Beweis:

7. Man verzeichne den Erzeugungskreis, welcher die Basis in D berührt (Geometr. §. 112.), und ziehe in demselben den Durchmesser DG, so fällt dieser mit AD in eine gerade Linie (Geom. §. 111. I. Zus.)

8. Aus dem Mittelpuncte E dieses Kreises ziehe man die gerade Linie EF, und

9. aus dem Mittelpuncte A der Basis die geraden Linien AH, AF, so ist

10. AM = AH = AF = AN (Nr. 2.), folglich

11) liegt F in der verlangten Entfernung AM.

12. Ferner ist: AC = AB ± BC = AE, und der Winkel CAH = FAN (Nr. 6.) mithin

13. $\Delta CAH \cong \Delta EAF$, also

14.

14. Der Winkel AEF=ACH, oder DEF=BCH, und

15. EF = CH, das ist, der Punct F ist vom Mittelpunct E um den Halbmesser entfernt, und liegt also in der Peripherie des über D stehenden Erzeugungskreises.

16. Ferner da DEF = BCH (Nr. 14.) so ist arc. DF = arc. BH = arc. BD (Nr. 4.) folglich

17. liegt der Punct F in den beyden Epicycloiden (§. 358. III Zus.) in der gegebenen Entfernung (Nr. 11.) und ist also der gesuchte.

I. Zusatz: Berührt der Erzeugungskreis die Basis auf ihrer äussern oder innern Seite ihres Umfanges, in B, und man nimmt auf den beyden Kreisen die beliebigen aber gleichen Bögen BH = BD, beschreibt aus A mit AH einen Kreisbogen Mμ, ziehet nach B, D die geraden Linien AM, AN, welche den Kreisbogen in den Puncten M, N schneiden. Nimmt endlich auf diesem Kreisbogen NF = MH, so ist F ein Punct einer Epicycloide, welche der Punct B beschreibt, indem sich der Erzeugungskreis von B gegen D zu wälzet.

II. Zusatz Eben so: Berühret der Erzeugungskreis die Basis in I, und man nimmt auf beyden Kreisen die beliebigen Bögen Iα = IL, Iβ = IO

u. s. w.

u. s. w. zieht aus A mit $A\alpha$, $A\beta$ Kreisbögen, und von A nach I, L, O gerade Linien, so daß AI die Bögen in a und b schneidet, die Linie AL den mit $A\alpha$ gezogenen Bogen in l, und die Linie AO den mit $A\beta$ gezogenen Bogen in o schneidet, nimmt endlich auf diesen Kreisbögen $ls = a\alpha$, $ot = b\beta$, so liegen die Puncte s, t in einer Epicycloide, welche der Punct I beschreibt, wenn sich der erzeugende Kreis auf der Basis von I gegen LOP zu wälzet.

§. 360.

Aufgabe: (Fig. 111. u. 112.)

Aus den gegebenen Halbmessern AI, CI der Basis und des Erzeugungskreises eine äussere oder innere Epicycloide zubeschreiben.

Auflösung:

1. Man verzeichne mit AI die Grundkreise für die beyden Epicycloiden, und
2. Man wähle den beliebigen Punct I an der Basis, und verzeichne aus CI den Erzeugungskreis, welcher in I die Basis für die äussere Epicycloide auf der erhabenen Seite (Fig. 111.), und für die innere Epicycloide auf der hohlen Seite (Fig. 112.) berührt. (Geom. §. 112.)

3. Für

3. Für den Halbkreis ist der Centriwinkel = 180°, verzeichnet man nun im Grundkreise den Centriwinkel

$IAR = \frac{CI}{AI} 180°$, so ist der Bogen IR des Grundkreises der halben Peripherie IK des Erzeugungskreises gleich. (§. 358. VII. Zus.)

4. Man theile daher diese beyden Bögen IK, IR in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, so daß $I\alpha = IL$, $I\beta = IO$, $I\gamma = IP$, $I\delta = IQ$, $IK = IR$.

5. Nun ziehe man aus A mit $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $A\delta$, AK concentrische Kreisbögen, welche den Durchmesser IK des Erzeugungkreises in a, b, c, d, K schneiden.

6. Ferner ziehe man die geraden Linien AL, AO, AP, AQ, AR, bis erstere den Kreisbogen $a\alpha$ in l, die zweyte den Bogen $b\beta$ in o, die dritte den Bogen $c\gamma$ in p, die vierte den Bogen $d\delta$ in q, und die letzte den Bogen Kr in r schneidet.

7. Nimmt man endlich auf dem Bogen al, die Länge $ls = a\alpha$, auf dem Bogen bo die Länge $ot = b\beta$, auf dem Bogen cp die Länge $pu = c\gamma$, auf dem Bogen dq die Länge $qw = d\delta$, so liegen

8. die Puncte I, s, t, u, w sämtlich in einer innern oder äussern Epicycloide, je nachdem sich

der

der Kreis auf der hohlen oder erhabenen Seite der Basis von I gegen R zu wälzet (§. 359. II. Zus.)

9. Da bey K der Bogen Kr mit dem Erzeugungskreise nur den Berührungspunct K gemein hat, so fällt auch der Punct r unmittelbar mit einem Puncte der Epicycloide zusammen.

I. Zusatz: Je größer die Anzahl der Theile Nr. 4. ist, desto mehrere Puncte der Epicycloide werden dadurch bestimmt.

II. Zusatz: Auf ähnliche Art läßt sich eine Cycloide verzeichnen, nun verwandeln sich Nr. 5. die Bögen in gerade Linien, die zur Basis parallel, und Nr. 6. stehen die Linien auf eben dieser Basis alle senkrecht. (§. 358. I. Zus.)

Anmerkung: Die mechanische Construction einer äussern, oder innern Epicycloide folgt unmittelbar aus der Erklärung §. 358. dieser Linien.

§. 361.

Lehrsatz: (Fig. 113.)

Wenn für den beliebigen Punct M einer äussern Epicycloide BVI der Erzeugungskreis die Basis in D berühret, und man vom Mittelpuncte A der Basis die geraden Linien AB, AM, AD zieht, nimmt erstere

zur

zur Abſciſſenlinie, und fällt von M auf ſie die rechtwinklichte Ordinate MP, zieht ferner im Erzeugungskreiſe durch den Berührungspunct D den Diameter DG, und den Halbmeſſer CM, und ſetzet die Halbmeſſer von der Baſis und dem Erzeugungskreiſe, und zwar erſtern oder $AB = a$, den zweyten $CD = b$, die Centriwinkel $BAD = \psi$, $MCD = \phi$, ferner die Abſciſſe $AP = x$, die Ordinate $MP = y$, und den Abſtand des Punctes M vom Mittelpuncte der Baſis, oder $AM = z$, ſo iſt:

$$x = (a + b) \cos. \psi - b \cos. (\phi + \psi)$$

$$y = (a + b) \sin. \psi - b \sin. (\phi + \psi)$$

$$z^2 = (a + b)^2 + b^2 - 2b\,(a + b) \cos. \phi$$

Beweis:

1. Der Diameter DG des Erzeugungskreiſes fällt mit dem Halbmeſſer AD der Baſis in eine gerade Linie (Geometr. §. 111. I. Zuſ.)
2. Man fälle nun aus C auf die Abciſſenlinie AP den Perpendikel CO, und von M auf letztere die ſenkrechte MQ, ſo iſt $CO \# MP$, und $MQ \# PO$, folglich
3. $MP = QO$, und $MQ = PO$ (Geom. §. 45. IV. Zuſ.)
4. Im rechtwinklichten Dreyecke AOC iſt der Winkel $ACO = 90° - OAC = 90° - BAD$
$$= 90° - \psi$$

5. Im

5. Im Dreyecke MCQ ist der genannte Winkel
$MCQ = MCD - QCD = MCD - ACO$
$= \phi - (90° - \psi)$ (Nr. 4.) $= \phi + \psi - 90°$,
mithin

6. $\sin. MCQ = - \cos. (\phi + \psi)$, und
$\cos. MCQ = \sin. (\phi + \psi)$

7. Ferner ist im rechtwinklichten Dreyeck CQM:
$MC : MQ = 1 : \sin. MCQ$, und
$MC : CQ = 1 : \cos. MCQ$, oder
$b : MQ = 1 : - \cos. (\phi + \psi)$, und
$b : CQ = 1 : \sin. (\phi + \psi)$, also

8. $MQ = - b \cos. (\phi + \psi)$, und
$CQ = b \sin. (\phi + \psi)$

9. Im rechtwinklichten Dreyecke AOC ist ebenfalls
$AC : CO = 1 : \sin. CAO$, und
$AC : AO = 1 : \cos. CAO$, oder
$a + b : CO = 1 : \sin. \psi$, und
$a + b : AO = 1 : \cos. \psi$, also

10. $CO = (a + b) \sin. \psi$, und
$AO = (a + b) \cos \psi$

11. Nun ist $AP = AO + OP = AO + MQ$ (Nr. 3.), das ist

12. $x = (a + b) \cos. \psi - b \cos. (\phi + \psi)$
(Nr. 8. u. 10.)

13. $MP = OQ$ (Nr. 3.) $= CO - CQ$, das ist:

14.

14. $y = (a+b) \sin. \psi - b \sin. (\phi + \psi)$ (Nr. 8. u. 10.)

15. $x^2 = (a+b)^2 \cos. \psi^2 - 2b(a+b) \cos. \psi \cos. (\phi+\psi) + b^2 \cos. (\phi+\psi)^2$

$y^2 = (a+b)^2 \sin. \psi^2 - 2b(a+b) \sin. \psi \sin. (\phi+\psi) + b^2 \sin. (\phi+\psi)^2$: also

16. $z^2 = x^2 + y^2 = (a+b)^2 - 2b(a+b) [\cos. \psi \cos. (\phi+\psi) + \sin. \psi \sin. (\phi+\psi)] + b^2 = (a+b)^2 + b^2 - 2b(a+b) \cos. \phi$ (Trigon. §. 309. IV. Zus.)

17. wodurch nebst N. 12 u. 14 der Lehrsatz erwiesen ist.

I. Zusatz. Weil allemal der Bogen BD = dem Bogen DM ist (§. 358. II. Zus.) so ist $\phi : \psi = a : b$ (§. 358. V. Zus.) mithin

$$\psi = \frac{b}{a} \phi, \; d\psi = \frac{b}{a} d\phi$$

II. Zusatz. $x = (a+b) \cos. \psi - b \cos. (\phi+\psi)$ (N. 12) also

$$dx = -(a+b) \sin. \psi \, d\psi + b \sin. (\phi+\psi) (d\phi + d\psi) \text{ (§. 236.)}$$

$$= -(a+b) \sin. \psi . \frac{b}{a} d\phi + b \sin. (\phi+\psi) \left(1 + \frac{b}{a}\right) d\phi \text{ (I. Zus.)}$$

$$= -\frac{b(a+b)}{a} d\phi [\sin. \psi - \sin. (\phi+\psi)]$$

III. Zusatz: $y = (a + b) \sin. \psi - b \sin. (\phi + \psi)$ (Nr. 14.) also

$$dy = (a+b) \cos. \psi d \psi - b \cos. (\phi + \psi) (d\phi + d\psi)$$

$$= (a+b) \cos. \psi \frac{b}{a} d\phi - b \cos. (\phi+\psi) (1 + \frac{b}{a}) d\phi$$

$$= \frac{b(a+b)}{a} \cos. \psi d\phi - \frac{b(a+b)}{a} \cos. (\phi + \psi) d\phi$$

$$= \frac{b(a+b)}{a} d\phi [\cos. \psi - \cos. (\phi + \psi)]$$

IV. Zusatz: $z^2 = (a+b)^2 + b^2 - 2b(a+b) \cos. \phi$ (Nr. 16.) mithin

$$2 zdz = 2b (a+b) \sin. \phi d \phi$$ und

$$dz = \frac{b (a+b) \sin. \phi d \phi}{z}$$

$$= \frac{2b (a+b) \sin. \frac{1}{2} \phi \cos. \frac{1}{2} \phi d \phi}{z}$$ (Trigon. §. 306. II. Zus.)

V. Zusatz: $dx^2 = \frac{b^2 (a+b)^2}{a^2} d \phi^2 [\sin. \psi^2 - 2 \sin. \psi \sin. (\phi + \psi) + \sin. (\phi + \psi)^2]$

$$dy^2 = \frac{b^2 (a+b)^2}{a^2} d \phi^2 [\cos. \psi^2 - 2 \cos. \psi \cos. (\phi + \psi) + \cos. (\phi + \psi)^2]$$ also

$$dx^2 + dy^2 = \frac{b^2 (a+b)^2}{a^2} d \phi^2 [1 - 2 \cos. \phi + 1]$$ (Trigon. §. 309. IV. Zus.)

$$= \frac{2 b^2 (a+b)^2}{a^2} d \phi^2 [1 - \cos. \phi]$$

=

$$= \frac{2b^2(a+b)^2}{a^2} d\phi^2 2 \sin.\tfrac{1}{2}\phi^2$$ (Trigon. §. 308. III. Zus.)

$$= \frac{4b^2(a+b)^2}{a^2} \sin.\tfrac{1}{2}\phi^2 d\phi^2$$

§. 362.

Lehrsatz: (Fig. 114.)

Wenn für die innere Epicycloide alle Bestimmungen, wie bey der äussern im vorhergehenden §. beybehalten werden, so ist:

$$x = (a - b)\cos.\psi + b\cos.(\phi - \psi)$$

$$y = (a - b)\sin.\psi - b\sin.(\phi - \psi)$$

$$z^2 = (a - b)^2 + b^2 + 2b(a - b)\cos.\phi$$

Beweis:

1. Der Durchmesser DG des Erzeugungskreises fällt mit dem Halbmesser AD in eine gerade Linie zusammen (Geometr. §. 111. I. Zus.)
2. Man ziehe aus C auf die Abscissenlinie AB die senkrechte CO, und auf letztere aus M die senkrechte MQ, so ist CO ‡ MP, und MQ ‡ PO, mithin
3. MP = QO, und MQ = PO
4. Im rechtwinklichten Dreyeck AOC ist der Winkel ACO = 90° — OAC = 90° — BAD = 90° — ψ, mithin

der

der Winkel $DCQ = 180° - ACO$
$= 180° - (90° - \psi)$
$= 90° + \psi$, und daher

5. $MCQ = MCD - DCQ = \phi - (90° + \psi)$
$= (\phi - \psi) - 90°$, also

6. $\sin. MCQ = - \cos. (\phi - \psi)$, und
$\cos. MCQ = \sin. (\phi - \psi)$

7. Im rechtwinklichten Dreyecke CQM ist:
$CM : MQ = 1 : \sin. MCQ$, und
$CM : CQ = 1 : \cos. MCQ$, das ist:
$b : MQ = 1 : - \cos. (\phi - \psi)$, und
$b : CQ = 1 : \sin. (\phi - \psi)$, mithin

8. $MQ = - b \cos. (\phi - \psi)$, und
$CQ = b \sin. (\phi - \psi)$

9. Im rechtwinklichten Dreyeck AOC ist ebenfalls $AC : CO = 1 : \sin. CAO$, und $AC : AO = 1 : \cos CAO$, das ist:
$a - b : CO = 1 : \sin. \psi$, und $a - b : AO = 1 : \cos. \psi$, mithin

10. $CO = (a - b) \sin. \psi$, und
$AO = (a - b) \cos. \psi$

11. Nun ist $AP = AO - OP = AO - MQ$ (Nr. 3.) also

12. $x = (a - b) \cos. \psi + b \cos. (\phi - \psi)$
(Nr. 8. u. 10.)

13.

13. $MP = OQ$ (Nr. 3.) $= CO - CQ$, folglich

14. $y = (a - b) \sin. \psi - b \sin. (\phi - \psi)$ (Nr. 8. u. 10.)

15. $x^2 = (a - b^2) \cos. \psi^2$
$+ 2 b (a - b) \cos. \psi \cos. (\phi - \psi)$
$+ b^2 \cos. (\phi - \psi)^2$
$y^2 = (a - b^2) \sin. \psi^2 - 2 b (a - b) \sin. \psi \sin. (\phi - \psi)$
$+ b^2 \sin. (\phi - \psi)^2$, also

16. $z^2 = x^2 + y^2 = (a - b)^2 + b^2$
$+ 2b (a-b) [\cos. \psi \cos. (\phi - \psi) - \sin. \psi \sin. (\phi - \psi)]$
$= (a - b^2) + b^2 + 2 b (a - b) \cos. \phi$
(Trig. §. 309. IV. Zus.)

17. Durch Nr. 12, 14 u. 16. ist der Lehrsatz erwiesen.

I. Zusatz: Bey der innern Epicycloide ist ebenfalls der Bogen BD der Basis allemal dem Bogen DM des Erzeugungskreises gleich (§. 358. II. Zus.) mithin $\phi : \psi = a : b$, also $b \phi = a \psi$

II. Zusatz: Wenn der Halbmesser a der Basis noch einmal so groß als der Halbmesser b des Erzeugungskreises, so fällt die innere Epicycloide mit der geraden Linie BA, das ist die halbe innere Epicycloide mit dem Halbmesser der Basis, und die ganze Epicycloide mit dem Diameter zusammen. Denn wenn $a = 2b$, so ist auch $\phi = 2 \psi$ (I. Zus.)

(I. Zus.) mithin wenn man diese Werthe in die Gleichungen Nr. 12, 14 u. 16. setzet,

$x = (2b - b) \cos. \psi + b \cos. (2\psi - \psi)$

$= b \cos. \psi + b \cos. \psi$

$= 2b \cos. \psi$

$y = (2b - b) \sin. \psi - b \sin. (2\psi - \psi)$

$= b \sin. \psi - b \sin. \psi$

$= 0$

das ist für jeden Werth von x fällt allemal der entsprechende Punct M in die Abscissenlinie AB, ferner

$z^2 = x^2 + y^2 = 4b^2 \cos. \psi^2$ also

$z = 2b \cos. \psi = x$, das ist, die Entfernungen sämtlicher Puncte sind allemal den entsprechenden Abscissen gleich, für $\psi = 0$; ist also $x = z = 2b = a$, das ist der Anfangspunct liegt in B in der Peripherie der Basis; für $\psi = 90°$ oder $\phi = 180°$ wird $x = z = 0$; das ist, der entsprechende Punct derhalben innern Epicycloide fällt in den Mittelpunct der Basis.

III. Zusatz: Sind die Halbmesser der Basis, und des Erzeugungskreises einander gleich, so schwindet die innere Epicycloide in einem Puncte am Umfange der Basis zusammen, denn

für $a = b$, ist $a - b = 0$ und $\phi = \psi$, also

$\phi - \psi = o$ mithin

$x = b$

$y = o$

$z = b$

das ist jeder Punct fällt immer mit B zusammen.

IV. Zusatz: Wenn der Halbmesser der Basis bey der innern oder äussern Epicycloide unendlich ist, so entsteht die Cycloide (§. 358. I. Zus.) mithin ist letztere Linie die gemeinschaftliche Gränze der beyden erstern, der sie sich um so mehr nähern, je größer die Halbmesser ihrer Grundkreise sind.

V. Zusatz: Setzt man den Halbmesser a der Basis bey der innern Epicycloide negativ, so wendet dieselbe die erhabene Seite dem Erzeugungskreise zu, mithin entsteht eine äussere Epicycloide, da aber auch der Centriwinkel BAD eine der vorigen entgegengesetzte Lage erhält, das ist, wenn ψ den hohlen, und ψ^I den erhabenen Winkel BAD bezeichnen, der Winkel BAD ist nun auf jener Seite, auf welcher er vorher hohl war, erhaben; so daß $\psi^I = 360° - \psi$ ist. Will man also aus den Gleichungen der innern Epicycloide jene der äussern ableiten, so muß Nr. 12, 14, 16. die Größe a negativ, und statt ψ der Winkel

$\psi^{1} = 360^{\circ} - \psi$ gesetzt werden, das ist

$x = -(a+b)\cos.\ \psi^{1} + b\cos.\ (\phi - \psi^{1})$

$y = -(a+b)\sin.\ \psi^{1} - b\sin.\ (\phi - \psi^{1})$

$z^{2} = (-a-b)^{2} + b^{2} - 2b\,(a+b)\cos.\ \phi$

$= (a+b)^{2} + b^{2} - 2b\,(a+b)\cos.\ \phi$

VI. Zusatz: Will man statt dem erhabenen Winkel ψ^{1} den spitzigen Winkel ψ setzen, so ist

$\psi^{1} = 360^{\circ} - \psi$, mithin $\sin.\ \psi^{1} = -\sin.\ \psi$;

$\cos.\ \psi^{1} = \cos.\ \psi$

$\phi - \psi^{1} = \phi - 360^{\circ} + \psi = (\phi + \psi) - 360^{\circ}$, also

$\sin.\ (\phi - \psi^{1}) = \sin.\ (\phi + \psi)$;

$\cos.\ (\phi - \psi^{1}) = \cos.\ (\phi + \psi)$

Sezet man diese Werthe in die Gleichungen des V. Zus. so wird

$x = -(a+b)\cos.\ \psi + b\cos.\ (\phi + \psi)$, oder

$-x = (a+b)\cos.\ \psi - b\cos.\ (\phi + \psi)$

$y = (a+b)\sin.\ \psi - b\sin.\ (\phi + \psi)$, und für sich schon

$z^{2} = (a+b)^{2} + b^{2} - 2b\,(a+b)\cos.\ \phi$

Vergleichet man diese Gleichungen mit jenen §. 361., so sind sie eben dieselben; daß man gegenwärtig x negativ findet, zeigt nur an, daß bey der äussern Epicycloide die Abscissenlinie mit jener der innern eine entgegengesetzte Lage habe, so wie die Halbmesser ihrer Grundkreise.

VII. Zusatz: Eben so läßt sich die innere Epicycloide als eine äussere betrachten, deren Halbmesser der Basis negativ und der Winkel BAD erhaben ist, setzet man daher in die Gleichungen §. 361. den Halbmesser a negativ, und statt ψ den erhabenen Winkel ψ^{I}, so wird für die innere Epicycloide

$$x = -(a-b) \cos. \psi^{I} - b \cos. (\phi + \psi^{I})$$

$$y = -(a-b) \sin. \psi^{I} - b \sin. (\phi + \psi^{I})$$

$$z^2 = (-(a-b))^2 + b^2 + 2b(a-b) \cos. \phi$$

$$= (a-b)^2 + b^2 + 2b(a-b) \cos. \phi$$

VIII. Zusatz: Will man statt dem erhabenen Winkel ψ^{I} den hohlen ψ setzen, so ist:

$\psi^{I} = 360° - \psi$, also $\sin. \psi^{I} = -\sin. \psi$; $\cos. \psi^{I} = \cos. \psi$

$\phi + \psi^{I} = 360° + \phi - \psi$, $\sin. (\phi + \psi^{I}) = \sin. (\phi - \psi)$

$\cos. (\phi + \psi^{I}) = \cos. (\phi - \psi)$, Setzet man nun diese Werthe in die Gleichungen des VIIten Zusatzes, so ist

$$x = -(a-b) \cos. \psi - b \cos. (\phi - \psi), \text{ oder}$$

$$-x = (a-b) \cos. \psi + b \cos. (\phi - \psi)$$

$$y = (a-b) \sin. \psi - b \sin. (\phi - \psi), \text{ und}$$

$$z^2 = (a-b)^2 + b^2 + 2b(a-b) \cos. \phi$$

wie

wie Nr. 12 — 16; die Abscisse x ergiebt sich nothwendig, da sie wie der Halbmesser der Basis in Beziehung auf die äussere Epicycloide bey der innern eine entgegengesetzte Lage hat, negativ.

IX. Zusatz: Eben diese Werthe erhält man für die innere Epicycloide, wenn man in den Gleichungen §. 361. für die äussere Epicycloide die Größe b negativ, und statt der Summe $\phi + \psi$ die Differenz $\phi - \psi$ setzet, so daß also in der Folge alle aus den Gleichungen der äussern Epicycloide abgeleiteten Sätze für die innere gelten, so bald man diese Substitution vornimmt.

§. 363.

Lehrsatz: (Fig. 113.)

Behält man alle §. 361. angenommenen Bezeichnungen, und setzet bey der äussen Epicycloide den Bogen BM = s, ferner die Fläche, welche von den geraden Linien AB, AM, und dem Bogen BM, also von a, z und s begränzet wird, mithin ABMA = R, so ist:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{2b\,(a + b)\,\sin.\,\frac{1}{2}\,\phi d\phi}{a}$$

$$dR = \frac{1}{2}\,z\,\sqrt{(ds^2 - dz^2)}$$

Be=

Beweis:

1. Auf dem Bogen BM der Epicycloide nehme man den Punct n unendlich nahe an M, so ist $Mn = ds$

2. Von n fälle man auf die Abscissenlinie AB den Perpendikel np, und von M auf letztern die senkrechte Mm, so ist: $Pp = Mm = dx$, und $mn = dy$, mithin

3. im rechtwinklichten unendlich kleinen Dreyecke Mmn ist: $Mn^2 = Mm^2 + mn^2$ (§. 233. VII. Zus.), also

4. $ds^2 = dx^2 + dy^2$, und

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{2b\,(a+b)}{a} \sin. \tfrac{1}{2}\,\phi d\phi$$

(§. 361. V. Zus.)

5. Zieht man ferner aus A mit $AM = z$ den Kreisbogen MN, und die gerade Linie An, welche diesen Bogen in o schneidet, so steht der Halbmesser Ao auf selben senkrecht, mithin ist $Mon = 90°$, und $on = dz$.

6. In dem rechtwinklichten unendlich kleinen Dreyecke Mon ist daher:

$Mo^2 = Mn^2 - on^2 = ds^2 - dz^2$ (Nr. 1. u. 5.); also

$Mo = \sqrt{(ds^2 - dz^2)}$

7. Fer-

7. Ferner ist das unendlich kleine Dreyeck AMnA $= dR$ das Flächenelement, und

8. $dR = \frac{1}{2} An . oM$ (§. 233. VIII. Zus.)
$= \frac{1}{2} (z + dz) . \sqrt{(ds^2 - dz^2)}$
$= \frac{1}{2} z \sqrt{(ds^2 - dz^2)} + \frac{1}{2} dz \sqrt{(ds^2 - dz^2)}$

9. Nun ist aber das letzte Glied in Beziehung auf das vorhergehende unendlich klein (Arithm. §. 302. I. Zus.) folglich

10. $dR = \frac{1}{2} z \sqrt{(ds^2 - dz^2)}$ eine unvollständige Gleichung. (Arithmet. §. 299.)

Zusatz: Dieser Lehrsatz läßt sich auf ähnliche Art für die innere Epicycloide (Fig. 114.) erweisen.

§. 364.

Lehrsatz: (Fig. 113.)

Für den beliebigen Punct M der äussern Epicycloide, wenn man vom Puncte D, in welchem der Erzeugungskreis die Basis berührt, im erstern Kreise die Sehne DM zieht, so liegt sie in der Richtung der Normal dieser Epicycloide.

Beweis:

1. Man behalte so wohl die Construction, als die angegebenen Bezeichnungen §. 361. u. §. 363., so steht die Linie AM oder z auf den mit ihr aus A beschriebenen Kreisbogen MoN senkrecht, mithin

2. der

2. der Winkel AMo = AMD + DMo = 90°

3. Im gleichschenklichten Dreyecke DCM ist
$2\,CDM = 180° - DCM = 180° - \phi$, also
$CDM = 90° - \frac{1}{2}\phi$, mithin

4. $ADM = 180° - CDM = 180° - (90° - \frac{1}{2}\phi)$
$= 90° + \frac{1}{2}\phi$, folglich

5. $\sin. ADM = \cos. \frac{1}{2}\phi$.

6. Im Dreyecke ADM ist nun
$AM : AD = \sin. ADM : \sin. AMD$, das ist:
$z : a = \cos. \frac{1}{2}\phi : \sin. AMD$, mithin

7. $$\sin. AMD = \frac{a \cos. \frac{1}{2}\phi}{z}$$

8. In dem rechtwinklichten unendlich kleinen Dreyecke noM ist ferner:
$Mn : no = 1 : \sin. nMo$, oder
$ds : dz = 1 : \sin. nMo$, mithin

9. $$\sin. nMo = \frac{dz}{ds}$$

10. Nun ist aber $dz = \frac{2b\,(a+b) \sin. \frac{1}{2}\phi \cos. \frac{1}{2}\phi\, d\phi}{z}$
(§. 361. IV. Zus.) und

$$ds = \frac{2b\,(a+b) \sin. \frac{1}{2}\phi\, d\phi}{a}$$ (§. 363.)

11.

11. Setzet man diese beyden Werthe in die Gleichung Nr. 9., so wird

12. $\sin. nMo = \frac{a \cos. \frac{1}{2} \phi}{z}$, folglich

13. sin. nMo = sin. AMD (Nr. 7.), mithin AMD = nMo, und

14. AMD + DMo = nMo + DMo = DMn, also

15. DMn = 90° (Nr. 2.), das ist

16. die Sehne DM steht in M auf dem Elemente des Bogens, also auch der Tangente senkrecht, folglich fällt ihre Richtung mit jener der Normal zusammen.

I. Zusatz: Da sich die innere Epicycloide auf die äussere reduciren läßt (§. 362. VII. Zus.), so gilt der Lehrsatz auch für die innere Epicycloide, also allgemein für jede Epicycloide.

II. Zusatz: Zieht man im Erzeugungskreise durch den Berührungspunct D den Durchmesser DG, ferner die Sehne GM, so fällt letztere mit der Tangens MT in eine Linie, denn da der Winkel DMG = 90° (Geom. §. 72. III. Zus.) so steht GM durch M auf der Normal DM senkrecht, folglich fällt ihre Richtung mit jener der Tangens zusammen in eine Linie.

III.

III. Zusatz: Für den Anfangspunct B fallen die beyden Puncte D und M mit B zusammen, mithin fällt die Tangens mit der geraden Linie PB zusammen, und hat also mit dem Halbmesser AB der Basis einerley Richtung.

IV. Zusatz: Gelangt der beschreibende Punct nach V, so fällt die Sehne DM mit dem Durchmesser EV zusammen, folglich steht in V, oder im Scheitel der Epicycloide, die Tangens auf der Richtung des Halbmessers AE vom Grundkreise senkrecht.

V. Zusatz: Berühren sich die Grundkreise einer äussern und innern Epicycloide BMI und B'MI' (Fig. 115.) in dem Puncte D, und gehört der Erzeugungskreis DMGD zu beyden gemeinschaftlich, so ist auch der Punct M, wenn die Bögen BD = B'D = MD, ein gemeinschaftlicher Punct beyder Epicycloiden (§. 358. III. Zus.), und die Sehne DM liegt in der Richtung ihrer Normal (Lehrs.), so wie die Sehne GM in der Richtung der Tangens (II. Zus.), folglich berühren sich die beyden Curven in M.

VI. Zusatz: Wälzet sich nun der eine Grundkreis auf dem andern fort, so bleiben beyde Epicycloiden stets mit einander in Berührung.

VII.

VII. Zusatz: Wenn noch der Halbmesser der Basis der innern Epicycloide doppelt so groß als jener des gemeinschaftlichen Erzeugungskreises ist, so wird die innere Epicycloide eine gerade Linie, welche durch den Anfangspunct B derselben und dem Mittelpunct A' ihrer Basis geht (§. 362. II. Zus.), mithin ist eben diese gerade Linie, da sie immer mit der äussern Epicycloide in Berührung bleibt (VI. Zus.), wenn sich der eine Grundkreis über den andern fortwälzet, jedesmal die Richtung der Tangens der äussern Epicycloide.

§. 365.

Lehrsatz: (Fig. 116.)

Wenn für den beliebigen Bogen BM einer Curve BMI die gerade Linie AB solche in B berühret, mithin ganz ausserhalb an der erhabenen Seite der Curve liegt, ferner CM der Krümmungshalbmesser derselben in M ist, und man zieht aus M auf die Linie AB die senkrechte MP, so ist für AP = x, MP = y;

$$MC = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}$$

Beweis:

1. Da der Anfangspunct A der Abscisse AP nicht in B, sondern in der bestimmten Entfernung BA genommen wird, so besteht AP aus einer beständigen

digen Größe AB = a, und einer veränderlichen BP = u, oder

2. $x = a + u$

3. Nun errichte man auf AP durch B die senkrechte BO, und fälle auf sie von M die senkrechte MQ, setze

BQ = v, und MQ = w, so ist

4. $u = w$, also

$x = a + u = a + w$

$dx = dw$, $d^2x = d^2w$

5. Eben so ist: $y = v$, mithin

$dy = dv$, und $d^2y = d^2v$

6. Für die rechtwinklichte Coordinaten v, und w ist aber

$$MC = -\frac{(dv^2 + dw^2)^{\frac{3}{2}}}{dv\, d^2w - dw\, d^2v} \quad (§. 264.)$$

7. Setzet man in diese Gleichung aus Nr. 4. u. 5. die Werthe, so wird

$$8.\ MC = -\frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\, d^2x - dx\, d^2y}$$

$$= \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}$$

§. 366.

§. 366.

Lehrsatz: (Fig. 113.)

Bey den bisher angenommenen Bestimmungen, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser für die beliebige Stelle M der Epicycloide BMI bezeichnet, ist:

$$\varrho = \frac{4b\,(a+b)}{2b+a} \sin.\tfrac{1}{2}\phi$$

Beweis:

1. $\varrho = \dfrac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$ (§. 365.)

2. $dx^2 + dy^2 = \dfrac{4b^2\,(a+b)^2}{a^2} \sin.\tfrac{1}{2}\phi^2\,d\phi^2$

(§. 361. V. Zus.), mithin

$$(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{8b^3\,(a+b)^3}{a^3}\,d\phi^3 \sin.\tfrac{1}{2}\phi^3$$

$$= \frac{4b^3(a+b)^3}{a^3}\,d\phi^3 \sin.\tfrac{1}{2}\phi\,(1-\cos.\phi)$$

(Trigon. §. 308. III. Zus.)

3. $dx = -\dfrac{b\,(a+b)}{a}\,d\phi\,[\sin.\psi - \sin.(\phi+\psi)]$

$$dy = \frac{b\,(a+b)}{a}\,d\phi\,[\cos.\psi - \cos.(\phi+\psi)]$$

(§. 361. II. u. III. Zus.)

Diese beyden Werthe sind nun Functionen vom Winkel ϕ, indem $\psi = \dfrac{b}{a}\phi$ ist (§. 361. I. Zus.),

nimmt

nimmt man nun $d\phi$ als eine beständige Größe, so sind doch noch dx, dy veränderliche Größen.

4. Zur Abkürzung setze man:

$$\frac{b\,(a+b)}{a} = A$$

$$\sin.\,\psi - \sin.\,(\phi+\psi) = V$$

$$\cos.\,\psi - \cos.\,(\phi+\psi) = W,$$ so wird

5. $(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}} = 4A^3\,d\phi^3 \sin.\,\tfrac{1}{2}\phi\,(1-\cos.\phi)$ (Nr. 2.)

6. $dx = -A\,d\phi\,.\,V$ (Nr. 3.), also
$d^2x = -A d\phi dV$, und

7. $dy = A d\phi\,.\,W$ (Nr. 3.), also
$d^2y = A d\phi\, dW$, mithin

8. $dxd^2y = -A^2 d\phi^2.\,VdW$
$dyd^2x = -A^2 d\phi^2.\,WdV$, also

9. $dxd^2y - dyd^2x = A^2 d\phi^2\,(WdV - VdW)$

10. Nun ist

$$dV = \cos.\psi d\psi - \cos.\,(\phi+\psi)\,(d\phi+d\psi) \text{ (Nr.4.)}$$

$$= \cos.\,\psi \frac{b}{a} d\phi - \cos.\,(\phi+\psi)\,(d\phi + \frac{b}{a} d\phi)$$

(§. 361. I. Zus.)

$$= \frac{b}{a} d\phi.W - d\phi\,\cos.\,(\phi+\psi),$$ und

11. $WdV = \frac{b}{a} d\phi . W^2 - Wd\phi \cos. (\phi + \psi)$

12. $dW = - \sin. \psi d\psi + \sin. (\phi + \psi) (d\phi + d\psi)$

$= - \sin. \psi \frac{b}{a} d\phi + \sin. (\phi + \psi)(d\phi + \frac{b}{a} d\phi)$

$= - \frac{b}{a} d\phi . V + d\phi \sin. (\phi + \psi)$, und

13. $VdW = - \frac{b}{a} d\phi . V^2 + Vd\phi \sin. (\phi + \psi)$

folglich

14. $WdV - VdW = \frac{b}{a} d\phi (V^2 + W^2)$

$- Wd\phi \cos. (\phi + \psi) - Vd\phi \sin. (\phi + \psi)$

$= d\phi [\frac{b}{a} (V^2 + W^2) - (V \sin. (\phi + \psi) + W \cos. (\phi + \psi)]$

15. Nun ist:

$V^2 = \sin. \psi^2 - 2 \sin. \psi \sin. (\varphi + \psi) + \sin. (\varphi + \psi)^2$

$W^2 = \cos. \psi^2 - 2 \cos. \psi \cos. (\varphi + \psi) + \cos. (\varphi + \psi)^2$

also

16. $V^2 + W^2 = 1 - 2 \cos. \varphi + 1$ (Trigon. §.309. IV. Zus.)

$= 2 (1 - \cos. \varphi)$

17. $V \sin. (\varphi + \psi) = \sin. \psi \sin. (\varphi + \psi) - \sin. (\varphi + \psi)^2$

$W \cos. (\varphi + \psi) = \cos. \psi \cos. (\varphi + \psi) - \cos. (\varphi + \psi)^2$

mithin

18. $V \sin.(\varphi+\psi) + W \cos.(\varphi+\psi) = \cos.\varphi - 1$, und

19. $-[V \sin.(\varphi+\psi) + W \cos.(\varphi+\psi)] = 1 - \cos.\varphi$

20. Setzet man endlich die Werthe aus Nr. 16. u. 19. in die Gleichung Nr. 14. so wird

21. $$WdV - VdW = d\varphi \left[\frac{b}{a} 2(1-\cos.\varphi) + (1-\cos.\varphi)\right]$$
$$= d\varphi \left(\left(\frac{2b}{a} + 1\right)(1-\cos.\varphi)\right)$$
$$= d\varphi \left[\frac{2b+a}{a}(1-\cos.\varphi)\right]$$

22. Substituirt man diesen Werth in die Gleichung Nr. 9., so wird

23. $$dx d^2y - dy d^2x = \frac{2b+a}{a} A^2 d\varphi^3 (1-\cos.\varphi)$$

24. Setzet man endlich die Werthe Nr. 5. u. 23. in die Gleichung Nr. 1., so wird:

25. $$\varrho = \frac{4A^3 d\varphi^3 \sin.\frac{1}{2}\varphi (1-\cos.\varphi)}{\frac{2b+a}{a} A^2 d\varphi^3 (1-\cos.\varphi)}$$
$$= \frac{4A \sin.\frac{1}{2}\varphi}{\frac{2b+a}{a}} = \frac{4aA \sin.\frac{1}{2}\varphi}{2b+a}$$

=

$$= \frac{4a \sin. \frac{1}{2}\varphi}{2b+a} \cdot \frac{b(a+b)}{a} \text{ (Nr. 4.)}$$

$$= \frac{4b(a+b)\sin. \frac{1}{2}\varphi}{2b+a}.$$

I. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreyecke DMG ist der Peripherie-Winkel DGM dem halben Centriwinkel DCM gleich, das ist:

$$DGM = \tfrac{1}{2}\varphi$$

Ferner DG : DM = 1 : sin. DGM, oder

$$2b : DM = 1 : \sin. \tfrac{1}{2}\varphi, \text{ also}$$

$$DM = 2b \sin. \tfrac{1}{2}\varphi$$

Setzet man diesen Werth in die letzte Gleichung Nr. 25, so wird:

$$\varrho = \frac{2(a+b)}{2b+a} DM$$

II. Zusatz: $z^2 = (a+b)^2 + b^2 - 2b(a+b)\cos.\varphi$ (§. 361.), mithin

$$\cos.\varphi = \frac{(a+b)^2 + b^2 - z^2}{2b(a+b)}$$

Ferner $2 \sin. \frac{1}{2}\varphi^2 = 1 - \cos.\varphi$ (Trigon. §. 308. III. Zus.)

$$= 1 - \frac{(a+b)^2 + b^2 - z^2}{2b(a+b)}$$

$$= \frac{2ab + 2b^2 - a^2 - 2ab - 2b^2 + z^2}{2b(a+b)}$$

$$= \frac{z^2 - a^2}{2b(a+b)}\text{, und daher}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \frac{z^2 - a^2}{4b(a+b)}\text{; also } \sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{(z^2-a^2)}}{2\sqrt{(b(a+b))}}$$

Setzet man diesen Werth in die letzte Gleichung Nr. 25. so wird:

$$\varrho = \frac{4b(a+b)}{2b+a} \cdot \frac{\sqrt{(z^2-a^2)}}{2\sqrt{[b(a+b)]}}$$

$$= \frac{2\sqrt{[b(a+b)(z^2-a^2)]}}{2b+a}$$

III. Zusatz: Für die äussere Epicycloide, aus deren Construction (Fig. 113.) und Grundgleichungen (§. 361.) die voranstehenden Formeln abgeleitet sind, ist der Krümmungshalbmesser durch 3 verschiedene Gleichungen bestimmt, es ist nemlich:

$$\varrho = \frac{4b(a+b)}{2b+a} \sin.\tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{(Nr. 25.)}$$

$$= \frac{2(a+b)}{2b+a} DM \quad \text{(I. Zus.)}$$

$$= \frac{2\sqrt{[b(a+b)(z^2-a^2)]}}{2b+a} \quad \text{(II. Zus.)}$$

IV. Zusatz: Bey der äussern Epicycloide ist daher A) in Beziehung der verschiedenen Lagen des Punctes M

a) für

a) für den Anfangspunct B, wo also $\phi = o$, mithin auch sin. $\frac{1}{2}\phi$, also auch 2b sin. $\frac{1}{2}\phi$ $=$ DM $= o$, und da $z = a$, also $z^2 - a^2 = o$, wird

$\varrho = o$ (§. 352. II. Zus.)

b) Im Scheittel V, wo nemlich $\phi = 180°$, ist sin. $\frac{1}{2}\phi = 1$, also DM $= 2b$, und $z = a + 2b$ mithin $z^2 - a^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 - a^2 = 4b(a+b)$ also:

$$\varrho = \frac{4b\,(a+b)}{2b+a}$$

B) In Beziehung auf die verschiedene Größe der Halbmesser a, b der Basis und des Erzeugungskreises

a) Für $a = b$ wird

$\varrho = \frac{8}{3} b$ sin. $\frac{1}{2}\varphi = \frac{4}{3}$ DM $= \frac{2}{3} \sqrt{[2(z^2 - a^2)]}$

b) für $a = \infty$, oder für die Cycloide:

$\varrho = 4b$ sin. $\frac{1}{2}\phi = 2$ DM (§. 352. III. Zus.)

V. Zusatz: Für die innere Epicycloide muß in den sämtlichen Gleichungen (III. Zus.) der Halbmesser b, mithin auch die Sehne MD $= 2b$ sin. $\frac{1}{2}\phi$ (I. Zus.), als eine negative Größe gesetzt werden (§. 362. IX. Zus.), mithin wird:

 $\varrho =$

$$\varrho = -\frac{4b\,(a-b)}{a-2b}\,\sin.\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$= -\frac{2\,(a-b)}{a-2b}\,DM$$

VI. Zusatz: Bey der innern Epicycloide (Fig. 114.) ist daher

A) in Beziehung der verschiedenen Lagen des Punctes M,

a) im Anfange bey B

$\varrho = 0$

b) im Scheittel V:

$$\varrho = -\frac{4b\,(a-b)}{a-2b}$$

B) in Beziehung auf die verschiedene Größe der Halbmesser a und b

a) für $a = b$

$\varrho = 0$, das ist, die Hypocycloide schwindet in einen Punct zusammen (§. 362. III. Zus.)

b) für $a = 2b$

$\varrho = -\infty$, das ist, die Hypocycloide wird zur geraden Linie (§. 362. II. Zus.)

c) für $a = \infty$

$\varrho = -4b\ \sin.\tfrac{1}{2}\Phi = -2\,DM$ (IV. Zus. B. b:)

§. 367.

§. 367.

Lehrsatz: (Fig. 113.)

Wenn BM = s einen beliebigen Bogen der äussern Epicycloide bezeichnet, sonst aber alle bisher festgesetzte Bestimmungen beybehalten werden, so ist

$$s = \frac{4b\,(a+b)}{a}.(1-\cos.\tfrac{1}{2}\varphi)$$

Beweis:

1. $ds = \frac{2b\,(a+b)}{a}\,d\phi\,\sin.\tfrac{1}{2}\phi$ (§. 363.)

$= \frac{4b\,(a+b)}{a}\,\tfrac{1}{2}\,d\phi\,\sin.\tfrac{1}{2}\phi$, mithin

2. $s = -\frac{4b\,(a+b)}{a}\cos.\tfrac{1}{2}\phi + \text{const.}$ (§. 236. III. Zus.)

3. Nun ist für $\phi = 0$, auch $s = 0$, und $\cos.\tfrac{1}{2}\phi = 1$, also

4. $0 = -\frac{4b\,(a+b)}{a} + \text{const.}$, oder

$\text{const.} = \frac{4b\,(a+b)}{a}$, folglich

5. $s = \frac{4b\,(a+b)}{a} - \frac{4b\,(a+b)}{a}\cos.\tfrac{1}{2}\phi$

$= \frac{4b\,(a+b)}{a}(1-\cos.\tfrac{1}{2}\phi)$

I. Zu=

I. Zusatz: Bey der äussern Epicycloide ist daher

A) in Beziehung auf den Winkel ϕ

a) für $\phi = 180°$, das ist, für eine halbe Umwälzung des Erzeugungskreises, wo $\cos. \frac{1}{2}\phi = 0$:

$$s = BV = \frac{4b(a+b)}{a}$$

b) für $\phi = 360°$, also für eine ganze Umwälzung des Erzeugungskreises, wo $\cos. \frac{1}{2}\phi = -1$: die ganze äussere Epicycloide, oder

$$s = BVI = \frac{4b(a+b)}{a}(1+1) = \frac{8b(a+b)}{a}$$

B) in Beziehung auf die Größe der beyden Halbmesser a, b der Basis und des Erzeugungskreises

a) für $a = b$:

α) $s = BM = 8b(1 - \cos. \frac{1}{2}\phi)$

β) die ganze Epicycloide, oder

$s = BVI = 16b$

b) für $a = \infty$, oder die Cycloide

α) $s = BM = 4b(1 - \cos. \frac{1}{2}\phi)$

β) die ganze Cycloide, oder

$s = BVI = 8b$ (§. 353. II. Zus.)

II. Zusatz: Für die innere Epicycloide, oder die Hypocycloide (Fig. 114.) muß nun b negativ gesetzt werden (§. 362. IX. Zus.) folglich wird:

$$s = -\frac{4b(a-b)}{a}(1-\cos. \tfrac{1}{2}\phi)$$

das

das ist, die innere Epicycloide hat mit der äussern eine entgegengesetzte Lage; sie ist nemlich nach jener Seite zu erhaben, nach welcher letztere hohl ist, wenn sie beyde eine und dieselbe Basis haben.

III. Zusatz: Ohne auf diese Entgegensetzung zu sehen, das ist, ausser dem Verhältnisse mit der äussern ist für die innere Epicycloide

$$s = \frac{4b\,(a-b)}{a}\,(1-\cos.\tfrac{1}{2}\phi),\ \text{mithin}$$

A) In Beziehung auf den Winkel ϕ

a) für $\phi = 180°$, oder eine halbe Umwälzung des Erzeugungskreises, wo also $\cos.\tfrac{1}{2}\phi = 0$,

$$s = BV = \frac{4b\,(a-b)}{a}$$

b) für $\phi = 360°$, oder eine ganze Umwälzung des Erzeugungskreises, wo also $\cos.\tfrac{1}{2}\phi = -1$ wird die ganze innere Epicycloide, oder:

$$s = BVI = \frac{8b\,(a-b)}{a}$$

B) In Beziehung der Größen der beyden Halbmesser a, b der Basis und des Erzeugungskreises, ist

a) für $a = b$ allemal

$s = 0$, das ist, die innere Epicycloide, schwindet

det in einen Punct zusammen (§. 362. III. Zus. u. §. 366. VI. Zus.)

b) für $a = 2b$, wird

α) jeder beliebige Theil oder

$$s = BM = 2b\,(1 + \cos. \tfrac{1}{2}\phi)$$

β) die ganze innere Epicycloide, oder

$$s = BVI = 4b = 2a$$ (§. 362. II. Zus.),

c) für $a = \infty$, oder die Cycloide ist wieder

α) der beliebige Bogen

$$s = BM = 4b\,(1 - \cos. \tfrac{1}{2}\phi)$$

β) die ganze Cycloide, oder

$$s = BVI = 8b$$ wie im I. Zus.

§. 368.

Lehrsatz: (Fig. 113.)

Bey der äussern Epicycloide, wenn R die Fläche bezeichnet, welche der Bogen BM, und die geraden Linien AB, AM begränzen, und alle übrigen bisherigen Bestimmungen unverändert bleiben, so ist:

$$R = \frac{b\,(a+b)\,(a+2b)}{2a}\,(\text{arc.}\,\phi - \sin.\,\phi)$$

Beweis:

1. $dR = \frac{1}{2} z \sqrt{(ds^2 - dz^2)}$ (§. 363.), oder

2. $dR = \frac{1}{2} ds \sqrt{\left(z^2 - \frac{z^2 dz^2}{ds^2}\right)}$

3.

3. Nun ist: $\frac{1}{2} ds = \frac{b(a+b)}{a} d\phi \sin. \frac{1}{2}\phi$ (§.363.), also

4. $ds^2 = \frac{4b^2 (a+b)^2}{a^2} d\phi^2 \sin. \frac{1}{2}\phi^2$

5. $dz^2 = \frac{4b^2 (a+b)^2}{z^2} d\phi^2 \sin. \frac{1}{2}\phi^2 \cos. \frac{1}{2}\phi^2$ (§. 361. IV. Zus.), also

6. $z^2 dz^2 = 4b^2 (a+b)^2 d\phi^2 \sin. \frac{1}{2}\phi^2 \cos. \frac{1}{2}\phi^2$, mithin nach Nr. 4. wird

7. $\frac{z^2 dz^2}{ds^2} = a^2 \cos. \frac{1}{2}\phi^2 = a^2 (1 - \sin. \frac{1}{2}\phi^2)$
$= a^2 - a^2 \sin. \frac{1}{2}\phi^2$

8. $z^2 = (a+b)^2 + b^2 - 2b (a+b) \cos. \phi$ (§. 361.)
$= (a+b)^2 + b^2 - 2b (a+b) (1 - 2 \sin. \frac{1}{2}\phi^2)$
(Trig. §. 308. III. Zus.)
$= a^2 + 2ab + 2b^2 - 2ab - 2b^2$
$+ 4b (a+b) \sin. \frac{1}{2}\phi^2$
$= a^2 + 4b (a+b) \sin. \frac{1}{2}\phi^2$, mithin

9. $z^2 - \frac{z^2 dz^2}{ds^2} = a^2 \sin. \frac{1}{2}\phi^2 + 4b (a+b) \sin. \frac{1}{2}\phi^2$
$= (a^2 + 4ab + 4b^2) \sin. \frac{1}{2}\phi^2$, und

10. $\sqrt{(z^2 - \frac{z^2 dz^2}{ds^2})} = (a+2b) \sin. \frac{1}{2}\phi$

11.

11. Setzet man nun die Werthe Nr. 3. und 10. in die Gleichung Nr. 2., so wird:

$$12.\ dR = \frac{b\,(a+b)\,(a+2b)}{a}\, d\phi\ \sin.\ \tfrac{1}{2}\phi^2.$$

$$= \frac{b\,(a+b)\,(a+2b)}{2a}\, d\phi\ (1 - \cos.\ \phi)$$

(Trigon. §. 308. IV. Zus.), folglich

$$13.\ R = \frac{b\,(a+b)\,(a+2b)}{2a}\,(\text{arc.}\ \phi - \sin.\ \phi)$$

(§. 236. III. Zus. und Arithm. §. 326.), wo keine const. addirt werden darf, weil für $\phi = 0$, auch arc. $\phi = 0$, sin. $\phi = 0$ und $R = 0$ ist.

I. Zusatz: Bey der äussern Epicycloide ist also

A) in Beziehung auf den Winkel ϕ

a) für $\phi = 180°$, also für eine halbe Umwälzung des Erzeugungskreises, wo arc. $\phi = \pi$, (§. 301. I. Zus.) sin. $\phi = 0$ ist

$$R = BAVMB = \frac{b\,(a+b)\,(a+2b)}{2a}\,\pi$$

b) für $\phi = 360°$ oder eine ganze Umwälzung ist arc. $\phi = 2\pi$, sin. $\phi = -0$, mithin

$$R = BAIVMB = \frac{b\,(a+b)\,(a+2b)}{a}\,\pi$$

B) in Beziehung auf die Größe der beyden Halb- messer

messer a, b der Basis und des Erzeugungskreises ist

a) für $a = b$

α) überhaupt $R = BAMB = 3b^2 (arc.\phi - sin.\phi)$

β) für eine halbe Umwälzung; oder
$R = BAVMB = 3b^2 \pi$

γ) für eine ganze Umwälzung
$R = BAIVMB = 6b^2 \pi$

b) für $a = 2b$ wird ebenfalls
$R = 3b^2 (arc.\phi - sin.\phi)$

c) für $a = \infty$, oder für die Cycloide ist
$R = \infty$

II. Zusatz: Die Fläche BMS, welche durch die beyden Curven BM und BS, und die gerade Linie MS begränzt ist, läßt sich ebenfalls für jeden Winkel ϕ bestimmen. Denn area BMS = areae BMA — Sector BAS.

Nun ist durch den Lehrsatz area BMA bestimmt. Ferner ist durch den Halbmessrr $AB = a$, und dem eingeschlossenen Winkel $BAS = BAD - DAS = \psi - DAS = \frac{b}{a}\phi - DAS$ auch der Sector bestimmt, wo also alles bis auf den Centriwinkel DAS bekannt ist.

Es ist aber im geradlinigten Dreyecke DAM, die Seite $AD = a$, $AM = z = \sqrt{[(a+b)^2}$

+

$+ b^2 - 2b(a+b)\cos.\phi$] (§. 361.) ferner die Seite DM $= 2b \sin. \frac{1}{2}\phi$ (§. 366. I. Zus.) bekannt, aus diesen 3 Seiten läßt sich nun der Winkel DAM = DAS jedesmal berechnen (Trigonom. §. 341.)

III. Zusatz: Für die innere Epicycloide (Fig. 114.) muß wieder b negativ gesetzt werden (§. 362. IX. Zus.), dadurch wird nun:

$$R = -\frac{b(a-b)(a-2b)}{2a}(\text{arc.}\,\phi - \sin.\phi)$$

Die Fläche hat nemlich eine der äussern Epicycloide entgegengesetzte Lage, ohne auf diesen Gegensatz Rücksicht zu nehmen ist also für die innere Epicycloide

$$R = \frac{b(a-b)(a-2b)}{2a}(\text{arc.}\,\phi - \sin.\phi)$$

IV. Zusatz: Bey der innern Epicycloide wird also

A) in Beziehung auf den Winkel ϕ

a) für $\phi = 180°$, wo der Erzeugungskreis eine halbe Umwälzung vollendet hat, und arc. $\phi = \pi$ sin. $\phi = 0$, ist

$$R = ABMVA = \frac{b(a-b)(a-2b)}{2a}\pi$$

b) für $\phi = 360°$, also arc. $\phi = 2\pi$, und

sin.

sin. $\phi = - 0$, wo eine ganze Umwälzung vollendet ist, wird

$$R = ABMVIA = \frac{b\,(a-b)\,(a-2b)}{a}\,\pi$$

B) in Beziehung auf die Größe der beyden Halbmesser a, b

a) für $a = b$ ist allemal
$R = 0$, weil die ganze innere Epicycloide in einem Punct zusammen schwindet (§. 362. III. Zus.)

b) für $a = 2b$ ist ebenfalls
$R = 0$, denn die gerade Linie AM fällt immer mit AB zusammen (§. 362. II. Zus.)

c) für $a = \infty$ ist auch wie bey der äussern
$R = \infty$

§. 369.

Erklärungen: (Fig. 117.)

Wenn sich der Erzeugungskreis bthb am äussern Umfange der Basis fortwälzet, hingegen der beschreibende Punct B zwar in der Ebene dieser beyden Kreise, aber nicht im Umfange des Erzeugungkreises, sondern in einer gegebenen Entfernung CB liegt, so heißt

a) die von B während einer ganzen Umwälzung des Erzeugungskreises beschriebene Curve BFI eine verkürzte Epicycloide, und

b)

b) der aus C mit CB verzeichnete Kreis BTHB der beschreibende Kreis.

I. Zusatz: Der erzeugende, und der beschreibende sind also concentrische Kreise, und gleichen Centriwinkeln, entsprechen daher ähnliche Bögen.

II. Zusatz: Wenn sich der erzeugende Kreis von b bis d fortwälzt, so kömmt dadurch der Berührungspunct b in die Lage f, so daß jedesmal der Kreisbogen bd der Basis, dem Kreisbogen df des Erzeugungskreises gleich ist (§.358. II.Zus.)

III. Zusatz: Wenn nun der Punct b in die Lage f kömmt, so kömmt der beschreibende Punct B in die Lage F, rückt also der Erzeugungskreis, welcher anfänglich die Basis in b berührt bis d fort, und man nimmt den Bogen df = db, zieht durch f den Halbmesser Ef bis an die Peripherie des beschreibenden Kreises, so das sie in F zusammen treffen, so ist F die Lage des beschreibenden Punctes, mithin ein Punct der verkürzten Epicycloide.

IV. Zusatz: Wenn der Erzeugungskreis von b bis d sich fortgewälzet hat, und zieht man die Halbmesser desselben Ed, Ef, und die Halbmesser Ab, Ad der Basis, so ist für die gleichen Bögen bd = bf

bAd:

$bAd : dEf = Ed : Ad$, mithin $bAd = \frac{Ed}{Ad} dEf$ (§. 358. V. Zus.), und umgekehrt wo dieses Verhältniß der beyden Centriwinkel Statt hat, da sind die Bögen gleich.

§. 370.

Aufgabe: (Fig. 117.)

Der erzeugende Kreis berührt anfänglich die Basis in b, so daß anfänglich der beschreibende Punct B in den durch b gezogenen Diameter BT des beschreibenden Kreises fällt, im letztern Durchmesser ist nun ein Punct M, das ist, dessen Entfernung AM vom Mittelpuncte A der Basis gegeben, man sucht einen Punct, welcher in der verkürzten Epicycloide liegt, und eben dieselbe Entfernung hat.

Auflösung:

1. Man ziehe den Halbmesser Ab der Basis, so fällt solcher mit dem Durchmesser bt des erzeugenden (Geometr. §. 111. I. Zus.), also auch mit dem Durchmesser BT des concentrischen beschreibenden Kreises in eine gerade Linie, in welcher also der gegebene Punct M liegt.
2. Aus A beschreibe man mit AM den Kreisbogen $M\mu$, welcher die Peripherie des beschreibenden Kreises in einem Puncte H schneiden wird.

3.

3. zieht man also den Halbmesser CH, so ist dadurch der Centriwinkel BCH = bCh bestimmt.

4. An dem Halbmesser Ab verzeichne man den Centriwinkel bAd = $\frac{Cb}{Ab}$ bCh, so ist der Bogen bh des erzeugenden Kreises dem Bogen bd der Basis gleich (§. 369. IV. Zus.)

5. Nun verlängere man den Halbmesser Ad, bis er den Bogen Mμ in einem Puncte N schneidet.

6. Nimmt man endlich auf diesem Bogen NF=MH, so ist F der gesuchte Punct der verkürzten Epicycloide.

Beweis:

7. Man verzeichne den Erzeugungskreis, welcher den Grundkreis in d berühret (Geometr. §. 112.), und mit ED = CB den beschreibenden Kreis, ziehe durch d des letztern Durchmesser DG, so fällt solcher mit Ad in eine gerade Linie (Geom. §. 111. I. Zus.)

8. Vom Mittelpuncte E ziehe man die gerade Linie EF, und

9. eben so vom Mittelpunct A der Basis die geraden AF, AH, so ist

10. AF = AH = AM (Nr. 2.)

11. Ferner AC = Ab + bC = Ad + dE = AE, und

12. die Winkel CAH = EAF, weil arc. MH = arc. NF (Nr. 6.), mithin

13. $\triangle CAH \cong \triangle EAF$, folglich

14. EF = CH, das ist: der Punct F ist vom Mittelpuncte E um den Radius CH des beschreibenden Kreises entfernt, folglich liegt er im Umfange dieses Kreises.

15. Ferner ist nach Nr. 13. der Winkel AEF = ACH, also auch dEf = bCh, mithin

16. arc. df = arc. bh (Geom. §. 64.) = arc. bd (Nr. 4.)

17. Folglich fällt F in die abgekürzte Epicycloide (§. 369. III. Zus.), und hat die verlangte Entfernung (Nr. 10), ist also der gesuchte Punct.

I. Zusatz: Berühret der Erzeugungskreis anfänglich die Basis in b, so daß B der Anfangspunct der verkürzten Epicycloide ist, und man nimmt auf dem Erzeugungskreise und der Basis, die beliebigen einander gleichen Bögen, also bh = bd, zieht den Halbmesser Ch bis an die Peripherie des beschreibenden Kreises, oder bis H, verzeichnet aus A mit dem Halbmesser AH den Kreisbogen MHμ, ziehet ferner aus A die geraden

Linien Ab, Ad, bis solche diesen Kreisbogen in M und N schneiden, und nimmt endlich auf eben diesem Bogen NF = MH, so ist F ein Punct der verkürzten Epicycloide, welche der Punct B beschreibt, während sich der erzeugende Kreis von b bis d wälzet.

II. Zusatz: Da arc. bh: arc. bht = arc. BH: arc. BHT (§. 369. I. Zus.), so findet man den Punct H, in welchen der Halbmesser bh verlängert, die Peripherie des beschreibenden Kreises schneidet, wenn man den Bogen BH von solch einer Länge nimmt, daß er sich zum Halbkreise BHT eben so wie der Bogen bh des erzeugenden Kreises zur halben Peripherie bht verhält.

III. Zusatz: Theilet man daher die halbe Peripherie des Erzeugungskreises, welcher die Basis in i berührt in eine beliebige Anzahl z. B. in 5 gleiche Theile ie, ef, fg, gh, hk, und in eben so viele gleiche Theile Iα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, δK, die halbe Peripherie des beschreibenden Kreises, so sind α, β, γ, δ, K die Puncte, in welchen die durch e, f, g, h, k, gezogenen Radien dessen Peripherie schneiden.

IV. Zusatz: Nimmt man also auf der Basis den Bogen iL = ie des Erzeugungskreises, und beschreibt

schreibt aus A mit Aα einen Kreisbogen αs, welcher den Durchmesser lK in a schneidet, zieht ferner die gerade Linie AL, bis solche den Bogen αs in l schneidet, und nimmt endlich auf eben diesem Bogen ls = aα, so ist s ein Punct der verkürzten Epicycloide, welche der beschreibende Punct l verzeichnet, wenn sich der erzeugende Kreis, von b gegen LOP zu, auf der Basis fortwälzet.

V. Zusatz: Auf ähnliche Art wie §. 360. läßt sich daher aus den gegebnen Halbmessern Ai, Ci und Cl die verkürzte Epicycloide l s t u w r verzeichnen.

§. 371.

Lehrsatz: (Fig. 118.)

Wenn für den beliebigen Punct M der verkürzten Epicycloide, welche in B ihren Anfangspunct hat, der erzeugende Kreis die Basis in d berühret, und man zieht vom Mittelpuncte A der letztern die geraden Linien AB, AM, Ad, nimmt erstere zur Abscissenlinie, fällt von M auf ihre Verlängerung die rechtwinklichte Ordinate MP, zieht im beschreibenden Kreise durch d den Diameter GD, ferner den Halbmesser CM, setzet den Halbmesser der Basis Ab = a, den Halbmesser des erzeugenden Kreises Cd = b,

 den

den Radius des beschreibenden Kreises CD = c, ferner die Centriwinkel MCD = mCd = ϕ, bAd = ψ, die Abscisse AP = x, die Ordinate MP = y, die Entfernung des Punctes M vom Mittelpuncte A der Basis, oder AM = z, so ist

$$x = (a + b) \cos. \psi - c \cos. (\phi + \psi)$$
$$y = (a + b) \sin. \psi - c \sin. (\phi + \psi)$$
$$z^2 = (a + b)^2 + c^2 - 2c (a + b) \cos. \phi$$

Beweis:

1. Der durch d gezogene Diameter GD fällt mit gd, also auch mit Ad in eben dieselbe gerade Linie (Geom. §. 111. I. Zus.)

2. Man fälle aus C auf AP die senkrechte CO, und auf letztere von M den Perpendikel MQ, so ist CO $\#$ MP, und MQ $\#$ PO, mithin

3. MP = QO, und MQ = PO

4. Im rechtwinklichten Dreyecke AOC ist der Winkel ACO = 90° — OAC = 90° — bAd
$$= 90^\circ - \psi$$

5. Im Dreyecke MCQ ist der Winkel MCQ=MCD—QCD=mCd—ACO
$$= \phi - (90^\circ - \psi) \text{ (Nr. 4.)}$$
$$= \phi + \psi - 90^\circ, \text{ also}$$

6. sin.

6. $\sin. MCQ = - \cos. (\phi + \psi)$, und
$\cos. MCQ = \sin. (\phi + \psi)$

7. Ferner ist im rechtwinklichten Dreyecke CQM
$MC : MQ = 1 : \sin. MCQ$, oder
$c : MQ = 1 : - \cos. (\phi + \psi)$; und
$MC : CQ = 1 : \cos. MCQ$, oder
$c : CQ = 1 : \sin. (\phi + \psi)$, also

8. $MQ = - c . \cos. (\phi + \psi)$
$CQ = c . \sin. (\phi + \psi)$

9. Im rechtwinklichten Dreyecke AOC ist ebenfalls
$AC : CO = 1 : \sin. CAO$, oder
$(a+b) : CO = 1 : \sin. \psi$; und
$AC : AO = 1 : \cos. CAO$, oder
$(a+b) : AO = 1 : \cos. \psi$, mithin

10. $CO = (a+b) \sin. \psi$
$AO = (a+b) \cos. \psi$

11. Nun ist $AP = AO + OP = AO + MQ$ (Nr. 3.) also

12. $x = (a+b) \cos. \psi - c \cos. (\phi + \psi)$ (Nr. 8. u. 10.)

13. Ferner $MP = OQ$ (Nr. 3.) $= CO - CQ$, folglich

14. $y = (a+b) \sin. \psi - c \sin. (\phi + \psi)$ (Nr. 8. u. 10.)

15. $x^2 = (a+b)^2 \cos.\psi^2 - 2c(a+b)\cos.\psi\cos.(\varphi+\psi)$
$+ c^2 \cos.(\phi+\psi)^2$
$y^2 = (a+b)^2 \sin.\psi^2 - 2c(a+b)\sin.\psi\sin.(\phi+\psi)$
$+ c^2 \sin.(\phi+\psi)^2$, also

16. $z^2 = AM^2 = AP^2 + MP^2 = x^2 + y^2$
$= (a+b)^2 + c^2 - 2c(a+b)\cos.\phi$ (§. 361. Nr. 16. u. Trigon. §. 309. IV. Zus.)

I. Zusatz: Da wieder arc. bd = arc. dm, mithin $\psi : \phi = b : a$ (§. 369. IV. Zus.), so ist $\psi = \frac{b}{a}\phi$, und

$d\psi = \frac{b}{a} d\phi$, folglich

II. Zusatz:

$$dx = -\frac{a+b}{a} d\phi\,[b \sin.\psi - c \sin.(\phi+\psi)]$$

$$dy = \frac{a+b}{a} d\phi\,[b \cos.\psi - c \cos.(\phi+\psi)]$$

$$dz = \frac{c(a+b)\sin.\phi d\phi}{z}$$

III. Zusatz: Auf ähnliche Art wie bey der gemeinen Epicycloide kann man also für einen gegebenen Bogen der verkürzten Epicycloide ihren Krümmungshalbmesser, die Retification, oder Quadratur bestimmen.

IV. Zu-

IV. Zusatz: Durch ein ganz ähnliches Verfahren wie §. 364. ergiebt sich aber, daß die Sehne DM nicht in der Richtung der Normal liege, folglich auch, die durch G gezogene Sehne GM nicht einerley Lage mit der Tangens habe.

§. 372.

Erklärungen: (Fig. 119.)

Wälzet sich der erzeugende Kreis BTHB auf der äussern, also auf der erhabeuen Seite des Grundkreises BDRQ u. s. w. mit welchem er in einerlei Ebene liegt, fällt aber der beschreibende Punct b nicht in den Umfang, sondern innerhalb desselben in die Entfernung Cb so heißt

a) die vom Puncte b beschriebene Curve b f r i eine gestreckte Epicycloide, und

b) der aus C mit Cb beschriebene Kreis b t h b der beschreibende Kreis.

Zusatz: Man sieht aus den bisher vorgetragenen Lehren die Art des Verfahrens ein, wenn man die Eigenschaften dieser Linie genau entwickeln will.

§. 373.

Erklärung: (Fig. 120. u. 121.)

Wenn der beschreibende Kreis BHT mit dem unbeweglichen Grundkreis BDI (um die Verwirrung

zu

zu vermeiden, sind von beyden Kreisen nur ihre Hälften gezeichnet) nicht in einerley Ebene fällt, sondern gegen denselben unter einem beliebigen Winkel geneigt ist, so heißt die vom Puncte B bey dem Fortwälzen erzeugte Linie eine sphärische Epicycloide.

I. Zusatz: Der Neigungswinkel der beyden Kreisebenen BHT und BDI ist dem Winkel TBI der beyden Diameter am Berührungspuncte B gleich, denn offenbar schneiden die beyden Ebenen einander in einer geraden Linie durch B (Geometr. §. 161. II. Zus.), welche mit der Peripherie eines jeden Kreises nur den Punct B gemein hat, mithin die gemeinschaftliche Tangens ist, auf dieser Tangens stehen nun die beyden Durchmesser BT, BI senkrecht (Geom. §. 76. I. Zus.), folglich ist der Winkel TBI der Neigungswinkel beyder Kreisebenen (Geom. §. 169. III. Zus.)

II. Zusatz: Die Neugungsebene TBI steht auf beyden Kreisebenen senkrecht (Geom. §.170. VII. Zus.) errichtet man also durch die Mittelpuncte C, A auf die Ebenen dieser Kreise die Perpendikel CK, AK, so fallen sie ganz in die Ebene TBI, und der Winkel BCK = BAK = 90° (Geom. §. 170. IV. Zus.), folglich stossen diese auf die Schenkeln des hohlen Winkel TBI errichteten Perpendikel

dikel in einem Puncte K zusammen. (Geom. §. 46.)

III. Zusatz: Der Punct K ist von allen Puncten der Peripherie des Erzeugungskreises gleich weit entfernt, denn man ziehe von K nach 2 beliebigen Puncten B, T der Peripherie die geraden Linien KB, KT, und im Erzeugungskreise die Halbmesser CB, CT, so ist $\triangle KCB \cong \triangle KCT$, folglich KB = KT, eben so folgt, daß BK = KI, mithin daß alle Puncte der Peripherie des Grundkreises gleich weit von K abstehen.

IV. Zusatz: Wälzet sich nun der Erzeugungskreis auf der Peripherie des Grundkreises BDI, und bleibt dabey der anfängliche Neugungswinkel TBI (I. Zus.) unverändert, so bleiben auch alle Puncte der Peripherie des Erzeugungskreises stäts in der gleichen Entfernung KB vom Puncte K, folglich auch der beschreibende Punct B, mithin fällt die ganze Epicycloide BMI in die Oberfläche einer Kugel, von welcher KB der Radius ist, und heißt daher eine sphärische Epicycloide.

V. Zusatz: Zieht man von T auf die Ebene des Grundkreises die senkrechte Linie TE, so ist: TB : TE = 1 : sin. TBE = 1 : sin. TBI, mithin

TE

TE = TB sin. TBI, das ist, der Erzeugungskreis, während er sich auf der Peripherie des Grundkreises mit unveränderter Neigung TBI fortwälzet, bleibt immer zwischen der Peripherie des Grundkreises, und eines Parallelkreises, welcher von der Basis um TE entfernt ist, folglich liegt die sphärische Epicycloide in dem sphärischen Gürtel TBIS zwischen zweyen Parallelkreisen BDI u. TGS.

VI. Zusatz: Die Linie AK, wenn man sie beyderseits bis an die Oberfläche der Kugel verlängert, ist die gemeinschaftliche Axe, so wie P, Q die Pole der beyden Parallelkreise BDI und TGS; Ebenso

VII. Zusatz: Verlängert man KC beyderseits bis an die Oberfläche der Kugel, so sind c, γ die Pole des Erzeugungskreises (Geom. §. 253. IV. Zus.)

VIII. Zusatz: Ein Kreis, welcher sowohl durch die Pole P, Q des Grundkreises, als durch die Pole c, γ des Erzeugungskreises geht, ist ein größter Kreis, steht auf beyden senkrecht (Sphär. Trigon. §. 379.), und geht allemal durch die Berührungspuncte B, T des Erzeugungskreises mit dem Grund- und dem andern Parallelkreise, und umgekehrt: geht ein Kreis durch die Berührungs-

puncte

puncte B, T und die Pole P, Q des Grundkreises, so geht er auch durch die Pole c, γ des Erzeugungskreises, ist ein größter Kreis, und steht auf beyden Kreisen senkrecht.

IX. Zusatz: Wenn zwey größte Kreise PIQ, PRQ durch die Pole P, Q der beyden Parallelkreise TGS, BDI gehen, so sind die zwischen den größten Kreisen enthaltenen Bögen LS, OI dieser Parallelkreise einander ähnlich, und jeder hält so viele Grade als die sphärischen Winkel OQI = OPI; denn die beyden größten Kreise PIQ, PRQ stehen auf den Parallelkreisen senkrecht, mithin bilden ihre Durchschnittslinien den Neigungswinkel dieser Kreise gegeneinander (Geom. §. 171. II. Zus.), folglich ist der Winkel LFS = OAI = OQI = OPI (Sphär. Trigon. §. 381. II. Zus.), folglich haben auch die Bögen LS, OI dieser Centriwinkel gleich viele Grade.

X. Zusatz: Wenn ein größter Kreis PBQIP durch die Pole eines Kreises BDI, TGS oder BHT geht, also letztere halbirt, mithin die Durchschnittslinien BI, TS, BT Diameter dieser Kreise sind (Sphär. Trig. §. 379.), so sind die Halbmesser AB, FT, CB die Sinus der zwischen ihnen und dem Pole enthaltenen Bögen, das ist:

der

der Halbmesser AB = sin. arc. BQ, und eben so FT = sin. arc. QT, BC = sin. arc. Bc,

XI. Zusatz: Der Erzeugungskreis kann nie ein größter Kugelkreis seyn, mithin sind allemal die Bögen cB, cT eines durch dessen Pole gelegten größten Kreises spitzig, so wie auf der andern Seite γPB, γQT stumpf.

§. 374.

Aufgabe: (Fig. 120. und 121.)

Aus den gegebenen Halbmessern AB=a, BC=b, und dem Neigungswinkel TBI = B des Grund- und Erzeugungskreises die beyden Perpendikel CK = c, AK = k, nebst den von ihnen eingeschlossenen Winkel AKC = K zubestimmen.

Auflösung:

1. ABCKA bildet eine gebrochene in sich selbst zurückkehrende Linie.

2. Man bezeichne die Winkel mit den an ihren Scheittel gesetzten größern Buchstaben A, B, C, K, und mit den kleinern Buchstaben a, b, c, k die anliegenden Seiten AB, BC, CK, KA.

3. Von diesen Stücken sind nun nebst den beyden Linien a, b und dem eingeschlossenen Winkel B,

die

die beyden Winkel $A = C = 90°$ (§. 373. II. Zus.) gegeben.

4. Nimmt man die Seite AK zur Abscissenlinie, und A für ihren Anfangspunct, so ist für die Ecke K die rechtwinklichte Ordinate = o, mithin

5. $o = a \sin. A - b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C)$ (§. 5.)

6. Ferner ist $a \sin. A = a$ (Nr. 3.);
$-b \sin. (A + B) = -b \sin. (90° + B) = -b \cos. B$;
$+c \sin. (A + B + C) = +c \sin. (180° + B) = -c \sin. B$
(Trig. §. 296. IV. Zus. und §. 306.)

7. Setzet man nun diese Werthe in die Gleichung Nr. 5., so ist

8. $o = a - b \cos. B - c \sin. B$, also
$c \sin. B = a - b \cos. B$, und

9. $c = \frac{a - b \cos. B}{\sin. B} = a . \text{cosec}. B - b \cot. B$

10. Nimmt man nun AB zur Abscissenlinie, und B für ihren Anfangspunct, so ist für eben die Ecke K die rechtwinklichte Ordinate = AK = k, mithin

11. $k = b \sin. B - c \sin. (B + C)$
$= b \sin. B - c \sin. (B + 90°)$
$= b \sin. B - c \cos. B$
$= b \sin. B - \frac{(a - b \cos. B) \cos. B}{\sin. B}$ (Nr. 9.)

=

$$= \frac{b \sin. B^2 - a \cos. B + b \cos. B^2}{\sin. B},$$

folglich

12. $k = \frac{b - a \cos. B}{\sin. B} = b \operatorname{cosec.} B - a \cot. B$

13. Nimmt man endlich wieder AK zur Abscissenlinie, und A für ihren Anfangspunct, so ist für die Ecke K

$$\operatorname{tang.} K = \frac{a \sin. A - b \sin. (A+B)}{k - a \cos. A + b \cos. (A+B)} \text{ (§. 6.)}$$

14. Nun ist $a \sin. A = a$;

$-b \sin. (A+B) = -b \sin. (90^\circ + B) = -b \cos. B$, also

15. $a \sin. A - b \sin. (A+B) = a - b \cos. B$

16. $-a \cos. A = 0$;

$+b \cos. (A+B) = +b \cos. (90^\circ + B) = -b \sin. B$ (Trigon. §. 308.), mithin

17. $k - a \cos. A + b \cos. (A+b)$

$$= \frac{b - a \cos. B}{\sin. B} - b \sin. B \text{ (Nr. 12.)}$$

$$= \frac{b - a \cos. B - b \sin. B^2}{\sin. B}$$

$$= \frac{b \cos. B^2 - a \cos. B}{\sin. B}$$

$$= -\frac{(a - b \cos. B) \cos. B}{\sin. B}$$

=

$$= -\frac{a - b\cos. B}{\text{tang}. B}$$

18. Setzet man für Zähler und Nenner die Werthe Nr. 15. u. 17. in die Gleichung Nr. 13., so wird

19. $\text{tang}. K = (a - b\cos. B) \times -\frac{\text{tang}. B}{a - b\cos. B}$

$= -\text{tang}. B$

wodurch nebst Nr. 9. und 12. die Aufgabe aufgelöset ist.

I. Zusatz: Für $B = 90°$, ist $\text{cosec}. B = 1$; $\cot. B = 0$, und $\text{tang}. B = \infty$, mithin

$c = a$ (Nr. 9.), das ist: $CK = AB$;

$k = b$ (Nr. 12.), oder $AK = BC$;

$\text{tang}. K = -\infty$, also K der Ergänzungswinkel von B zu 180°, mithin $K = 90°$.

II. Zusatz: Für $B > 90°$ (Fig. 120.) ist sowohl die Tangens als die Cotangens negativ, hingegen die Cosecans bleibt positiv, mithin

$c = a\,\text{cosec}. B + b\cot. B$ (Nr. 9.)

$k = b\,\text{cosec}. B + a\cot. B$ (Nr. 12.)

$\text{tang}. K = \text{tang}. B$, das ist, K ergänzt B zu 180°, und ist also spitzig.

Für $B = 180°$, ist cosec. B, cot. B unendlich, mithin $c = k = \infty$; $\text{tang}. K = 0$, das ist die beyden Kreisebenen fallen in eine Ebene, und

die

die sphärische verwandelt sich in die gemeine äussere Epicycloide.

III. Zusatz: Für $B < 90°$ (Fig. 121.) sind alle Trigonometrischen Linien dieses Winkels positiv, mithin

$c = a$ cosec. $B - b$ cot. B

$k = b$ cosec. $B - a$ cot. B

tang. $K = -$ tang. B

folglich ist B der Ergänzungswinkel von K.

So lange a cot. $B <$ b cosec. B, also

$$\frac{a \text{ cos. } B}{\text{sin. } B} < \frac{b}{\text{sin. } B}, \text{ mithin, so lange}$$

$\cos B < \frac{b}{a}$, so lange bleibt k positiv, und behält also eine Fig. 120. ähnliche Lage, und der Winkel K ist stumpf $= 180° - B$.

Für cos. $B = \frac{b}{a}$ wird $k = 0$, folglich fällt der Mittelpunct der Kugel K mit dem Mittelpunct A der Basis zusammen.

Wenn endlich cos. $B > \frac{b}{a}$, so wird k negativ, das ist, AK bekömmt eine entgegengesetzte Lage, wie Fig. 121, und der Winkel K wird erhaben, mithin $K = 360° - B$, also auf der hohlen Seite $= B$.

IV. Zu-

IV. Zusatz:

Für B=o, ist tang B=o, cosec. B=∞, cot.B=∞ mithin c = (a—b) ∞; k = (b—a) ∞, tang K = —o, also K = 360°, das heißt: die sphärische Epicycloide verwandelt sich in die gemeine innere, oder Hypocycloide.

§. 375.

Aufgabe: (Fig. 120 u. 121.)

Aus den gegebenen beyden Halbmessern a, b und dem Neigungswinkel B des Grund- und Erzeugungskreises den Halbmesser BK = r der Kugel, in deren Oberfläche die sphärische Epicycloide fällt, zu bestimmen.

Auflösung:

$BK^2 = BC^2 + CK^2 = AB^2 + AK^2$

$= b^2 + c^2 = a^2 + k^2$, also

$r^2 = b^2 + (a \text{ cosec. } B - b \text{ cot. } B)^2$

$= a^2 + (b \text{ cosec. } B - a \text{ cot. } B)^2$ (§. 374. Nr. 9 u. 12.)

$r = \sqrt{[b^2 + (a \text{ cosec. } B - b \text{ cot. } B)^2]}$

$= \sqrt{[a^2 + (b \text{ cosec. } B - a \text{ cot. } B)^2]}$

I. Zusatz:

Für B=90°, wird cosec. B=1, u. cot. B=o, also $r = \sqrt{(b^2 + a^2)}$

II. Zusatz: Eben so läßt sich nun auch der Halbmesser FT des Parallelkreises bestimmen; denn in der gebrochenen Linie ABTFA ist A = F = 90°; nimmt man also AF zur Abscissenlinie, und A für ihren Anfangspunct, so ist für die Ecke T die rechtwinklichte Ordinate = FT, also

$FT = a \sin. A - 2b \sin. (B + A)$ (§. 5.)

$= a - 2b \cos. B.$

III. Zusatz: In den rechtwinklichten Dreyecken BAK, TFK ist ferner:

$BK : BA = 1 : \sin. BKA$, und

$TK : TF = 1 : \sin. TKF$, mithin

$$\text{Sin. } BKQ = \sin. BKA = \frac{BA}{BK};$$

$$\text{Sin. } TKQ = TKF = \frac{TF}{TK}.$$

Aus den beyden Centriwinke[illegible]Q, und TKQ lassen sich nun die Bögen BQ, TQ, folglich auch der Bogen BcT = BQ — TQ (Fig. 121.) = TQ — BQ (Fig. 120.) bestimmen.

§. 376.

Aufgabe: (Fig. 120 u. 121.)

Aus den Halbmessern a, b und dem Neigungswinkel B des Grund- und Erzeugungskreises den sphärischen Streifen bestimmen, welcher die sphärische Epi-

cycloide

cycloide bey einer vollendeten Umwälzung des ganzen Erzeugungskreises begränzet.

Auflösung:

1. Aus a, b und B berechne man den Halbmesser der Kugel $r = \sqrt{[b^2 + (a \text{ cosec. } B - b \text{ cot. } B)^2]}$ (§. 375.)

2. Durch den Mittelpunct K dieser Kugel lege man eine Ebene, so ist der Kugelschnitt ein größter Kreis (Geom. §. 252. I. Zus.)

3. Ferner berechne man den Halbmesser FT des Parallelkreises (§. 375. II. Zus.)

4. In dem größten Kugelkreise (Nr. 2.) ziehe man den beliebigen Durchmesser PQ, und nehme in demselben $KA = k = b \text{ cosec. } B - a \text{ cot. } B$ (§. 374 Nr. 12.); $KF = AK \mp AF = KA \mp FT = b \text{ cosec. } B - a \text{ coct. } B \mp$ [illegible] $\text{sin. } B$ (§. 373. V. Zus.)

5. Durch A und F lege man nun zwey Ebenen, auf welchen PA senkrecht steht, so sind die beyden Querschnitte zwey Parallelkreise der Kugel (Geom. §. 253. V. Zus.)

6. Für den Kreis durch A ist:

$$AB^2 = BK^2 - AK^2 = r^2 - k^2$$
$$= b^2 + (a \text{ cosec. } B - b \text{ cot. } B)^2$$
$$- (b \text{ cosec. } B - a \text{ cot. } B)^2$$
$$= b^2 + \frac{(a - b \text{ cos.} B)^2}{\text{sin. } B^2} - \frac{(b - a \text{ cos.} B)^2}{\text{sin. } B^2}$$

 =

$$= \frac{b^2 \sin. B^2 + a^2 - 2ab \cos. B + b^2 \cos. B^2}{\sin. B^2}$$

$$= \frac{b^2 - 2ab \cos. B + a^2 \cos. B^2}{\sin. B^2}$$

$$= \frac{a^2 \sin. B^2}{\sin. B^2} = a^2, \text{ alſo}$$

iſt BDI der Grundkreis.

7. Ferner iſt der andere Kreis durch F vom Grundkreiſe um AF = 2b sin. B (Nr. 4.) entfernt, mithin jener Kreis, deſſen Peripherie der Erzeugungskreis immer berührt, ſo daß alſo

8. die ſphäriſche Epicycloide zwiſchen dieſen beyden Kreiſen enthalten iſt.

9. Wenn nun der Erzeugungskreis eine ganze Umwälzung vollendet hat, ſo hat er auf der Peripherie des Grundkreiſes einen Bogen hinterlegt, welcher ſeiner ganzen Peripherie gleich iſt, bezeichnet nun P die Peripherie des Grund- und p jene des Erzeugungskreiſes, ſo iſt

$$P : p = a : b, \text{ mithin } p = \frac{b}{a} P$$

10. Nimmt man alſo auf dem Grundkreiſe den Bogen $BDI = \frac{b}{a} P$, und legt durch die Pole zwey größte Kreiſe, wovon der eine durch B, der andere durch I geht, ſo iſt

11. der gesuchte Streifen BTGSIDB auf der Oberfläche der Kugel bestimmt.

Zusatz: Da jeder Kreis, welcher durch die Pole P, Q des Grundkreises, oder eines andern zum Grundkreis parallelen Kreises geht, ein größter Kreis ist, auf ihren Ebenen senkrecht steht, so kann man einen solchen Kreis der Kürze wegen einen Meridian dieser Parallelkreise nennen.

§. 377.

Aufgabe: (Fig. 122.)

Auf dem Stück BTKI einer sphärischen Gürtel ist die spärische Epicycloide BFuI verzeichnet, ferner ist auf dem durch den Anfangspunct B gelegten Meridian ein Punct M gegeben, man soll den Punct F der sphärischen Epicycloide bestimmen, welcher gegen den Grundkreis, eben dieselbe Lage hat.

Auflösung:

1. Für den Bogen BDI der Basis, und dem Bogen TGK des Parallelkreises, sey Q einer der beyden Pole, und BQ ein Bogen des Meridians, auf welchen der Punct M gegeben ist.

2. Man ziehe durch M zur Basis den Bogen MHFS eines Parallekreises, so wird solcher die Peripherie des Erzeugungskreises, welcher die Basis

in

in B berührt, in einem Puncte H schneiden, wodurch also vom Erzeugungskreise der Bogen BH bestimmt ist.

3. Auf der Basis nehme man nun den Bogen BD = dem Bogen BH, und

4. ziehe durch D den Bogen DQ eines Meridiankreises, welcher den durch M gezogenen Parallelkreis (Nr. 2.) in N schneidet.

5. Nimmt man endlich auf dem Bogen MN, das Stück NF = MH, so ist F der gesuchte Punct der sphärischen Epicycloide.

Beweis:

6. Wenn der Erzeugungskreis von B nach D kömmt, so rücket dessen Pol C nach E, zieht man also

7. durch D den Meridianbogen DQ, so geht er durch den Pol E, so wie der Meridianbogen BQ durch den Pol C (§. 373. VIII. Zus.)

8. Zieht man ferner durch H, F ebenfalls Meridiane der Parallelkreise, und legt durch C, H einen größten Kreisbogen, und eben so durch E, F, so erhält man zwey sphärische Dreyecke CQH, und EQF.

9. Nun ist der Bogen QC = QE, und QH = QN, weil Q der gemeinschaftliche Pol ist; ferner der Winkel CQH = EQF (Nr. 5. u. §. 373. IX. Zus.), mithin auch

10. arc. $CH = $ arc. EF (Sphär. Trigon. §. 386.)

11. Da nun C, E die Pole des Erzeugungskreises für die Stellen B und D sind, und H im Umfange dieses Kreises liegt, so fällt auch F in eben diesen Umfang.

12. Ferner ist nach Nr. 9. der sphärische Winkel $QCH = QEF$, also auch $TCH = GEF$, und

13. arc. $TH = $ arc. FG (§. 373. IX. Zus.), mithin auch arc. $DF = $ arc. $BH = $ arc. BD (Nr. 3.); das ist

14. F ist der beschreibende Punct, wenn der Erzeugungskreis von B nach D kömmt, also ein Punct der sphärischen Epicycloide, und da ferner arc. $QF = $ arc. QM so hat er mit M eben dieselbe Entfernung vom Pole des Grundkreises, also vom Grundkreise selbst, folglich ist F der gesuchte Punct der sphärischen Epicycloide.

I. Zusatz: Berühret der Erzeugungskreis den Grundkreis in I, und man theilet die halbe Peripherie des erstern, und vom letztern einen Bogen IV, welcher mit dieser halben Peripherie gleiche Länge hat, so, daß $I\alpha = IL$, $I\beta = IO$, $I\gamma = IP$, $I\delta = IR$, $I\varepsilon = IS$, $IK = IV$; zieht den Meridianbogen QI, und aus eben diesem Pole Q des Grundkreises mit $Q\alpha$, $Q\beta$, $Q\gamma$, $Q\delta$, $Q\varepsilon$,

QK

QK parallele Kreisbögen, welche den Meridianbogen QI in a, b, c, d, e schneiden, verzeichnet noch die Meridianbögen QL, QO, QP, QR, QS, VQ, so daß ersterer den durch α gezogenen Parallelkreis in l, der zweyte den Parallelkreis durch β in o, der dritte den Parallelkreis durch γ in p, der vierte den Parallelkreis durch δ in r, der 5te den Parallelkreis durch ε in s, endlich der sechste den Parallelkreis durch K in u schneidet; nimmt endlich auf den Bögen dieser Parallelkreise $la^I = a\alpha$; $ob^I = b\beta$; $pc^I = c\gamma$; $rd^I = d\delta$; $se^I = e\varepsilon$, so sind a^I, b^I, c^I, d^I e^I, u Puncte der sphärischen Epicycloide, mithin

II. Zusatz: Je mehr man solche Puncte bestimmt, desto genauer läßt sich auf der Gürtel der Kugel die sphärische Epicycloide verzeichnen.

III. Zusatz: Je kleiner die Entfernung des Parallelkreises und Grundkreises in Beziehung auf den Halbmesser der Kugel, das ist, je kleiner TE $= 2b \sin. B$ (§. 373. V. Zus.) in Hinsicht $r = \sqrt{[b^2 + (a \operatorname{cosec.} B - b \cot. B)^2]}$ (§. 375.) desto mehr nähert sich die zwischen dem Grundkreise BDI, und dem Parallelkreise TGS (Fig. 120 u. 121.) enthaltene Kugelgürtel der krummen Seiten=

tenfläche eines abgekürzten Kegels (Geometrie §. 271.), mithin auch der Meridianbogen BcT dem Durchmesser BCT des Erzeugungskreises (Geom. §. 110. III. Zus.)

IV. Zusatz: Wenn also der Halbmesser r der Kugel in Beziehung auf den Abstand TE sehr groß ist, so ist der Fehler unbedeutend, wenn man den zwischen dem Grund- und Parallelkreis enthaltenen Streifen der Kugel, in welchem die sphärische Epicycloide enthalten ist, für die krumme Seitenfläche eines abgekürzten Kegels nimmt.

§. 378.

Aufgabe:

Aus den gegebenen Halbmessern a, b und dem Neigungswinkel B des Grund- und Erzeugungskreises die sphärische Epicycloide zu verzeichnen, wenn man die Kugelgürtel, in welcher diese Epicycloide enthalten ist, als die krumme Seitenfläche eines abgekürzten Kegels betrachten darf.

Auflösung:

1. In Beziehung auf die Neigung B giebt es drey Fälle, es kann nemlich B ein stumpfer, ein spitziger, oder ein rechter Winkel seyn.

I. Fall

I. Fall, wenn $B > 90°$. (Fig. 120.)

2. In der Neigungsebene TBI bildet ABTF ein Trapez, verlängert man daher die beyden Seiten TB, FA gegen die kleinere Parallele BA zu, so stossen sie in R zusammen (Geom. §. 51. X. Zus.), so daß also R die Spitze des gleichseitigen Kegels TRS ist, in dessen krummen Seitenfläche die Kugelgürtel, mithin auch die sphärische Epicycloide fällt.

3. Aus B ziehe man auf FT die senkrechte Be, so ist $Te = FT - AB = (a - 2b \cos. B) - a$ (§. 375. II. Zus.)
$= 2b \cos. B$, weil cos. B negativ ist

4. Ferner ist $\triangle TBe \backsim \triangle BRA$, mithin
$Te : TB = AB : BR$, das ist
$2b \cos. B : 2b = a : BR$, also

5. $BR = \frac{a}{\cos. B} = a \sec. B$, und
$TR = TB + BR = 2b + a \sec. B$

6. Nun ist die krumme Seitenfläche des Kegels TRS einem Kreisausschnitte gleich; dessen Halbmesser die Seite des Kegels also TR, und dessen Bogen die ganze Peripherie des Kreises $TGS = 2FT\pi$ $= 2(a + 2b \cos. B)\pi$ (§. 375. II. Zus.) ist. (Geom. §. 266. I. Zus.)

7.

7. Eben so gleicht die krumme Seitenfläche des Kegels BRI einem Kreisausschnitte, welcher BR zum Halbmesser, und die Peripherie des Grundkreises $= 2 a \pi$ zu seinem Bogen hat.

8. Mit RB, RT verzeichne man daher zwey concentrische Kreise, und nehme auf dem größern die Länge $= 2\, FT\pi$ (Nr. 6.), ziehe die Radien an die Endespuncte dieses Bogens, so ist der Kreisausschnitt bestimmt, und dadurch sowohl die krummen Seitenflächen der beyden Kegel, als des abgekürzten, mithin der sphärischen Gürtel verzeichnet.

9. In der Ebene dieses Kreisausschnittes beschreibe man auf der erhabenen Seite des kleinern Kreises als Basis eine äussere gewöhnliche Epicycloide (§. 360.), deren Erzeugungskreis b zum Halbmesser hat.

10. Lege endlich den Kreisausschnitt um den entsprechenden Kegel, so bildet der kleinere Kreisbogen die Basis, der größere den Parallelkreis TGS, und die verzeichnete gemeine Epicycloide erhält die Form der verlangten sphärischen Epicycloide.

II. Fall, wenn $B < 90°$. (Fig. 121.)

11. In diesem Falle schneiden sich die Seiten BT, AF gegen die Seite der Parallele TF zu; und

FT

$FT = a - 2b \cos. B$, $BE = a - (a - 2b \cos. B)$
$= 2b \cos. B$

12. $BE : BT = BA : BR$, oder
$2b \cos. B : 2b = a : BR$, also

13. $BR = \frac{a}{\cos. B} = a \sec. B$, und
$TR = BR - BT = a \sec. B - 2b$

14. Durch ähnliches Verfahren wie Nr. 6—9. verzeichne man den Kreisausschnitt, und in diesem über der hohlen Seite des größern Bogens als Basis aus BR und b eine gemeine innere Epicycloide (§. 360.)

15. Wird nun wieder der Ausschnitt um den entsprechenden Kegel gelegt, so erhält die innere Epicycloide die Form der verlangten sphärischen Epicycloide.

III. Fall, wenn $B = 90°$.

16. Nun lauffen BT und AF parallel, und der abgekürzte Kegel wird ein Cylinder, dessen Grundfläche der Basis, und dessen Höhe dem Durchmesser des Erzeugungskreises gleich ist.

17. Man verzeichne also ein Rechteck, und gebe demselben die Grundlinie $= 2a\pi$, und die Höhe $= 2b$, so ist solches der krummen Seiteenfläche dieses Cylinders gleich (Geom. §. 262.)

18. Verzeichnet man also aus dem Erzeugungskreise über der Grundlinie eine Cycloide (§. 360. II. Zus.), und legt das Rechteck um den Cylinder, so erhält die Cycloide die Form der verlangten sphärischen Epicycloide.

§. 379.

Lehrsatz: (Fig. 123.)

Für einem beliebigen Punct M der sphärischen Epicycloide BMO, wenn man durch diesen Punct M, und den Berührungspunct D der Basis und des Erzeugungskreises, einen größten Kugelkreis legt, so steht der Bogen DM auf der Epicycloide in M senkrecht.

Beweis:

1. Der Bogen BF des Grundkreises sey der halben Peripherie des erzeugenden Kreises gleich, so daß der beschreibende Punct, welcher anfangs die Basis in B berührt, nach einer halben Umwälzung des erzeugenden Kreises nach S, und der Berührungspunct nach F kömmt.

2. Für den Punct M der Epicycloide sey D der Berührungspunct des erzeugenden Kreises.

3. Aus dem Pole Q des Grundkreises beschreibe man auf der Oberfläche der Kugel mit dem Bogen QM einen Parallelkreis MNL, ziehe

4. die Meridianbögen QB, QM, QL, QD, QF. (§. 376. Zus.)

5. Letztere beyden Bögen gehen nun verlängert, der eine durch den Pol C des erzeugenden Kreises über D, und der andere durch den Pol E eben dieses Kreises über F (§. 373. VIII. Zus.), und schneiden den gezogenen Parallelkreis in N, V.

6. Legt man durch M, C sowohl, als durch L, E einen größten Kreis, so sind die Bögen CM, CD, EL, EF einander gleich, und stehen auf der Peripherie des erzeugenden Kreises senkrecht, (Geom. §. 253 u. 379.)

7. In den beyden sphärischen Dreyecken MQC, LQE, sind die Bögen CM = EL, MQ = LQ, CQ = EQ, mithin auch die Winkel QCM = QEL, oder DCM = FEL, und CQM = EQL, oder DQT = FQR

8. Da die Bögen MhD, LIF das Maaß der gleichen Winkel DCM, und FEL sind (§. 373. IX. Zus.), so ist

9. arc. MhD = arc. FiL.

10. Eben so ist arc. TQ = DQ = RQ = FQ, und DQT = RQF (Nr. 7.), also

11. DT = FR, folglich

12. TR = DF

13. Ferner ist vermöge der wälzenden Bewegung
arc. BD = arc. DhM = arc. FiL (Nr. 9.)
arc. BF = arc. FLS (Nr. 1.), mithin
arc. BF — arc. BD = arc. FLS — arc. FiL, das ist

14. arc. DF = arc. LS, oder
arc. TR = arc. LS (Nr. 12.)

15. Da die Bögen TR, ML der beyden Parallelkreise ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Halbmesser dieser Parallelkreise, mithin wie die Sinus der zwischen ihnen und dem Pole enthaltenen Bögen der Meridiane (§.373. IX.u.X.Zus.), das ist

16. ML : TR = sin. MQ : sin. DQ, oder

17. ML : LS = sin. MQ : sin. DQ (Nr. 14.).

18. Zieht man zu ML unendlich nahe einen Parallelkreis, welcher die Peripherien des erzeugenden Kreises in m, l und die Epicycloide in μ schneidet, so ist

19. lL = mM; und da die beyden Bögen ML, ml unendlich nahe einander sind, so ist ihr Unterschied unendlich klein, man kann daher ml = ML setzen.

20. Eben so wie Nr. 17. ist nun ferner

μl:

$\mu l : lS = \sin. MQ : \sin. DQ$, und daher (Nr. 17.) $\mu l : lS = ML : LS$, also

21. $(ML - \mu l) : (LS - lS) = \sin. MQ : \sin. DQ$, folglich

22. $m\mu : mM = \sin. MQ : \sin. DQ$ (Nr. 19.)

23. Die unendlich kleinen Bögen lassen sich als Stückchen ihrer Tangenten, also das $\triangle mM\mu$ als ein geradlinigtes betrachten, mithin ist

24. $m\mu : mM = \sin. mM\mu : \sin. m\mu M$, folglich $\sin. mM\mu : \sin. m\mu M = \sin. MQ : \sin. DQ$ (Nr. 22.)

25. Legt man durch die Puncte D, M einen größten Kugelkreis, so ist im sphärischen Dreyecke DQM $\sin. MQ : \sin. DQ = \sin. MDQ : \sin. DMQ = \sin. MDC : \sin. DMQ$ (Sphär. Trig. §. 381. V. Zus. u. §. 410.), mithin

26. $\sin. mM\mu : \sin. m\mu M = \sin. MDC : \sin. DMQ$

27. Nun ist $m\mu M = \mu MN$ (Geom. §. 45. III. Zus.) ferner im sphärischen Dreyecke MCD, der Bogen $CM = CD$ (Nr. 6.), mithin auch $MDC = CMD$ (Sphär. Trig. §. 410.), folglich

28. $\sin. mM\mu : \sin. \mu MN = \sin. CMD : \sin. DMQ$, und

29. $\sin. mM\mu : \sin. CMD = \sin. \mu MN : \sin. DMQ.$

30. Im gleichschenklichten sphärischen Triangel MCD (Nr. 27.) fällt ein von C auf MD gezogener Perpendikel CH zwischen die Schenkel CM, CD (Sphär. Trig. §. 395.), ferner ist offenbar $DM < 180°$, mithin auch $\frac{1}{2}$ DM, das ist $HM < 90°$, und eben so ist $CM < 90°$ (§. 373. XI. Zus.), folglich ist der Winkel CMD spitzig (Sphär. Trig. §. 391. IV. Zus.)

31. Der Bogen CM steht auf dem Erzeugungskreis senkrecht (Nr. 6.), also ist:
$mM\mu + \mu MC = mMC = 90°$, mithin

32. $\sin. mM\mu = \cos. \mu MC$, und

33. der Winkel μMC ist spitzig.

34. Eben so steht MQ auf dem Parallelkreise MNL, durch dessen Pole er geht, senkrecht (Sphär. Trig. §. 379.), mithin ist
$QMD + DMN = 90°$, also

35. $\sin. QMD = \cos. DMN$, und

36. der Winkel DMN spitzig.

37. Setzet man nun aus Nr. 32. u. 35. statt den Sinussen die Cosinusse in die Proportion Nr. 29, so wird

38. $\cos. \mu MC : \sin. CMD = \sin. \mu MN : \cos. DMN$

39. Ferner ist offenbar

$\mu MC + CMD = \mu MN + NMD = mMD$

40. Man setze der Kürze wegen

$\mu MC = \alpha,\ CMD = \beta,\ \mu MN = \gamma,\ NMD = \delta,\ \mu MD = u$

so ist nach Nr. 39.

41. $\alpha + \beta = u$, also $\alpha = u - \beta$

$\gamma + \delta = u;\quad \gamma = u - \delta$

42. Ferner $\cos.\ \alpha : \sin.\ \beta = \sin.\ \gamma : \cos.\ \delta$ (Nr. 38.), oder

$\cos.\ (u-\beta) : \sin.\ \beta = \sin.\ (u-\delta) : \cos.\ \delta$

$(\cos.\ u \cos.\ \beta + \sin.\ u \sin.\ \beta) : \sin.\ \beta$

$= (\sin.\ u \cos.\ \delta - \cos.\ u \sin.\ \delta) : \cos.\ \delta$

(Trigon. §. 307 u. 309., mithin

43. $\cos.\ u \cos.\ \beta \cos.\ \delta + \sin.\ u \sin.\ \beta \cos.\ \delta$

$= \sin.\ u \sin.\ \beta \cos.\ \delta - \cos.\ u \sin.\ \beta \sin.\ \delta;$

$\cos.\ u \cos.\ \beta \cos.\ \delta = - \cos.\ u \sin.\ \beta \sin.\ \delta,$

also

44. $\cos.\ u\ (\cos.\ \beta \cos.\ \delta + \sin.\ \beta \sin.\ \delta) = 0$

45. In diesem Producte ist also nothwendig einer der beyden Factoren $= 0$,

46. die beyden Winkel β, δ, das ist CMD, NMD sind spitzig (Nr. 30 u. 36.), daher sind sowohl die Sinus als Cosinus derselben positiv, folglich

kann

kann die Summe der in den Klammern enthaltenen 2 Producte nicht = o seyn.

47. Nothwendig ist daher cos. u = o, folglich u = μMD (Nr. 40.) = 90°, das ist

48. Der Kreisbogen DM steht in M auf der sphärischen Epicycloide BMO senkrecht.

I. Zusatz: Da die sphärische Epicycloide ganz in die Oberfläche der Kugel fällt, so steht auch in M der Halbmesser der Kugel auf der Epicycloide senkrecht; zieht man daher in der Ebene des durch D und M gelegten größten Kugelkreises nach M den Halbmesser, so steht das Element der Epicycloide Mμ auf selben und dem Bogen MD, mithin auf der Ebene dieses Kugelkreises senkrecht. (Geom. §. 163.)

II. Zusatz: Legt man also durch einen Punct M der sphärischen Epicycloide und den entsprechenden Berührungspuncte D des Erzeugungs- und Grundkreises einen größten Kugelkreis, errichtet durch M auf die Ebene desselben eine senkrechte gerade Linie, so hat solche mit dem Elemente Mμ einerley Richtung, und ist daher die Tangens der sphärischen Epicycloide in M.

Verzeichniß der Druckfehler.

Seite	Zeile	statt	lies
418	10	Np	mp
424	14	vollständige	unvollständige
432	14 u. 20	sin. (m + n)	sin. (m + n) z
443	5	$(a^2 - x^2)^{-1}$	$(a^2 + x^2)^{-1}$
365	15	∞	$\backsim$
468	3 von unten	Subnormal	Subtangens
474	7	dxdy dz	— dxdy dz
—	13	dz^2	dz
—	14	dz	d^2z
479	24	P = y	PM = y
480	16	(PM + po)	$\frac{1}{2}$ (PM + po)
485	9	DC : DC	Dc : DC
486	2 von unten	bAH >	bAH <
487	25	einer	eines
505	2	$x = \frac{1}{4} p$	$a = \frac{1}{4} p$
508	12	$\frac{y}{p} \sqrt{(\frac{1}{4} p^{\urcorner}}$	$\frac{y}{p} \sqrt{(\frac{1}{4} p^2}$

Seite	Zeile	statt	lies
508	3 von unten	$(1+\sqrt{2}^2$	$(1+\sqrt{2})^2$
510	10	$2 \sin. \alpha^2$	$2 \sin. \alpha^3$
511	16	$\frac{2 m^3 \sin. \alpha^2}{3p}$	$\frac{2 m^3 \sin. \alpha^3}{3p}$
529	11	$\frac{c u^2}{a^2}$	$\frac{c^2 u^2}{a^2}$
533	3 von unten	$fMQ -$	$fMQ =$
537	6	$\frac{s^2}{z^2}$	$\frac{s^2}{t^2}$
548	3	$8a^3 (px - \frac{px^2}{a})$	$4a^2 (px - \frac{px^2}{a})$
—	—	Am Ende des ganzen Bruches soll noch als Factor dx^2 stehen.	
—	6	$8a^3 (px - \frac{px^2}{a})$	$2a \sqrt{(px - \frac{px^2}{a})}$
560	3 von unten	$\log. nat. \frac{2e}{c}$	$\log. nat. (1 + \frac{2e}{c})$
562	1	$\frac{a c^2 \pi}{4e} +$	$\frac{a c^2 \pi}{4e} =$
584	10	$-8a^3$	$4a^2$
591	5	A	C
599	6	F	E
609	1, 2 u. 6	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
610	1 u. 3	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$

Seite	Zeile	statt	lies
618	2 u. 3	$-\frac{1}{3}y^2$	$+\frac{1}{3}y^2$
622	2 von unten	$-2fl$	$-\frac{1}{2}fl$
623	14	$+\frac{1}{6}l^3$	$+\frac{1}{6}l^2$
636	16	$\frac{258}{6}$	$\frac{258}{9}$

V. S

diss

. .

. .

. .

121.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Magold, Maurus,

Lehrbuch der höhern Geometrie zum Gebrauche öffentlicher Vorlesungen auf der königl. baierischen Universität in Landshut ; mit 4 gedruckten Tabellen Nro. V - VIII zur höheren Geometrie

Landshut 1813

Math.u. 119-3,2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594119-9